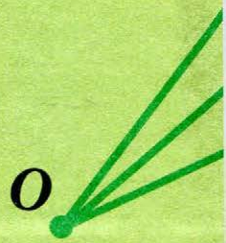
А. Д. АЛЕКСАНДРОВ
А. Л. ВЕРНЕР
В. И. РЫЖИК

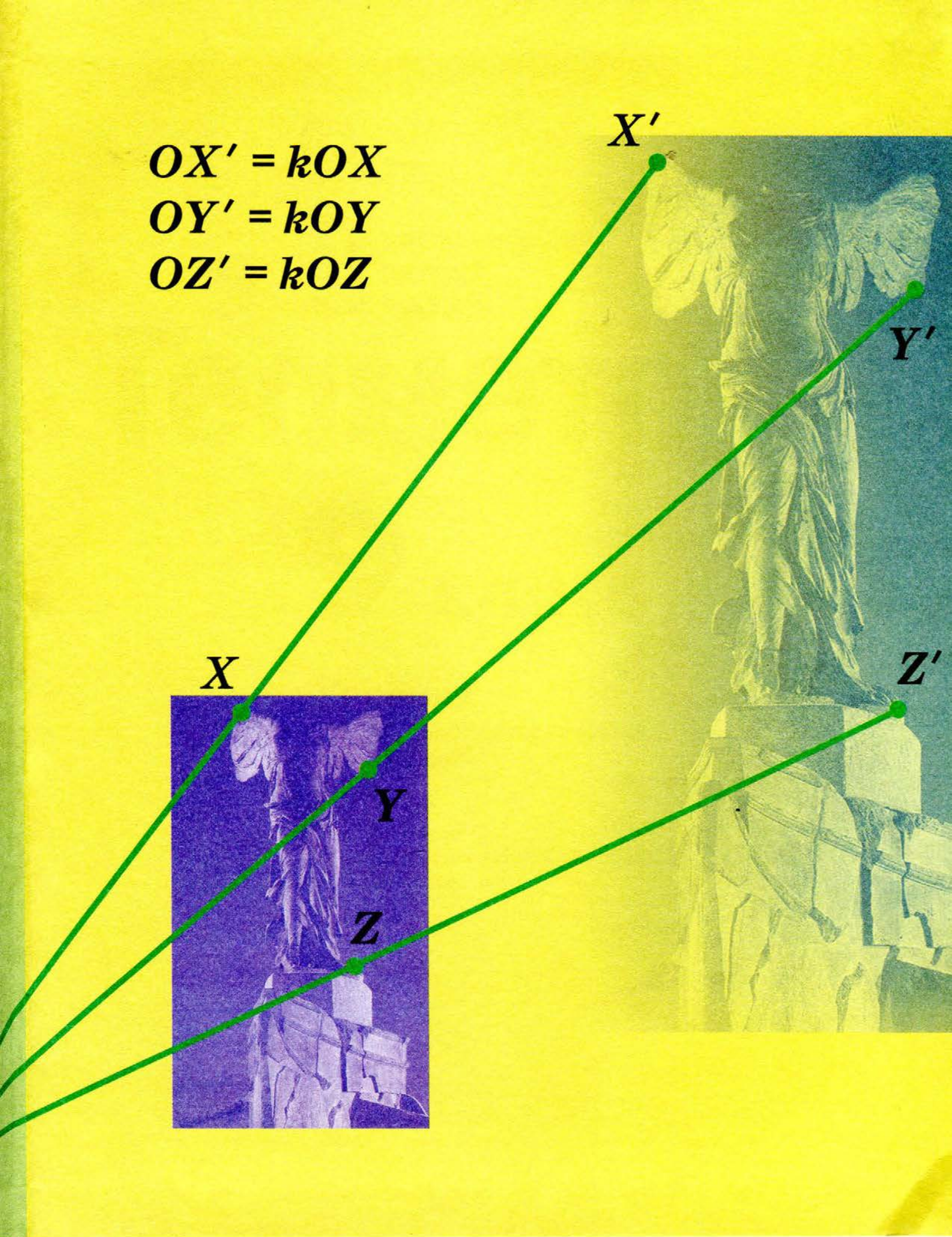
Геометрия

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Р. ДЕКАРТ
(1596 – 1650)





$OX' = kOX$
$OY' = kOY$
$OZ' = kOZ$
X'
Y'
Z'
X
Y
Z

ФГОС

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ
А. Л. ВЕРНЕР
В. И. РЫЖИК

Геометрия

9 класс

Учебник

для общеобразовательных организаций

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2014

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
А46

На учебник получены **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАН № 10106 — 5215/578 от 14.10.2011 г.), **педагогической** (заключения РАО № 01 — 5/7д — 349 от 17.10.2011 г. и № 303 от 29.01.2014 г.) и **общественной** (заключение РКС № 326 от 07.02.2014 г.) экспертиз.

Авторы:
А. Д. Александров, А. Л. Вернер, И. И. Рыжик

Условные обозначения:

□ ■ — начало и конец доказательства

▲▼ — дополнительный материал внутри пункта

★★ — начало и конец материала повышенной трудности, необязательного для всех

Александров А. Д.
А46 Геометрия. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2014. — 175 с.: ил. — ISBN 978-5-09-030484-9.

Учебник является третьей частью трёхлетнего курса геометрии для общеобразовательных школ. Учебник написан в соответствии с требованиями ФГОС. В текстах имеются справки словесника с переводами и пояснениями геометрических терминов, комментарии с интересными фактами. Задачный материал разнообразен и представлен в рубриках по видам деятельности, позволяющим формировать познавательные универсальные учебные действия. После каждой главы предлагаются задачи на повторение и задачи под рубрикой «Применяем компьютер», рассчитанные на работу с компьютерной средой *Живая математика*.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-030484-9

Оглавление

Глава I. Векторы и координаты 5

§ 1. Понятие вектора .... —

1.1. Скалярные и векторные величины. Направленные отрезки .... —

1.2. Сонаправленность векторов 8

1.3. Равенство векторов 11

1.4. О понятии вектора 14

1.5. Угол между векторами 16

§ 2. Сложение и вычитание векторов 18

2.1. Сложение векторов .... —

2.2. Свойства сложения векторов 22

2.3. Вычитание векторов. Противоположные векторы 24

§ 3. Умножение вектора на число 26

3.1. Умножение вектора на число .... —

3.2. Распределительные законы умножения векторов на число 30

§ 4. Векторная алгебра и векторный метод 32

4.1. Векторный метод .... —

4.2. Об истории теории векторов 36

§ 5. Координаты .... —

5.1. Векторы на координатной оси .... —

5.2. Векторы на координатной плоскости 38

5.3. Действия с векторами в координатной форме 44

5.4. Метод координат. Уравнения окружности и прямой 46

§ 6. Скалярное умножение векторов 48

6.1. Косинус .... —

6.2. Скалярное произведение векторов 52

Задачи к главе I 55

Глава II. Преобразования 57

§ 7. Основные понятия .... —

7.1. Понятие преобразования .... —

7.2. Важные примеры преобразований 60

7.3. Взаимно обратные преобразования 63

7.4. Композиция преобразований 65

§ 8. Движения 67

8.1. Определение и простейшие свойства движений .... —

8.2. Свойства фигур, сохраняющиеся при движении (инварианты движений) 70

8.3. Параллельный перенос 74
8.4. Центральная симметрия 76
8.5. Осевая симметрия на плоскости 79
8.6. Зеркальная симметрия 81
8.7. Поворот на плоскости 83
8.8. Классификация движений плоскости 87
8.9. Равенство фигур и движения .... —

§ 9. Симметрия фигур 88
9.1. Общее понятие о симметрии фигур. Виды симметрии фигур —
9.2. Фигуры, обладающие переносной симметрией 91
9.3. Элементы симметрии фигур 92
9.4. Симметрия правильных многоугольников, правильных пирамид и призм 95
9.5. Правильные многогранники 97

§ 10. Подобие 99
10.1. Преобразование подобия и его простейшие свойства .... —
10.2. Гомотетия 102
10.3. Свойства подобных фигур 107
10.4. Признаки подобия треугольников 111
Задачи к главе II 116

Глава III. Геометрия круга 118

§ 11. Хорды, касательные, секущие .... —
11.1. Свойства хорд .... —
11.2. Касание прямой и окружности. Взаимное расположение прямой и окружности 121
11.3. Градусная мера дуги окружности 125
11.4. Измерение вписанных углов 127
11.5. Произведения отрезков хорд и секущих 131
11.6. Взаимное расположение двух окружностей 135

§ 12. Вписанные и описанные окружности 138
12.1. Окружность, описанная вокруг многоугольника .... —
12.2. Окружность, вписанная в многоугольник 141
12.3. Замечательные точки треугольника. Окружность Эйлера 143

§ 13. Длина окружности и площадь круга 147
13.1. Измерение длины кривой. Длина окружности .... —
13.2. Длина дуги окружности 151
13.3. Измерение площади плоской фигуры. Площадь круга 153
13.4. Число π 157
13.5. Архимед 158
Задачи к главе III 160

Заключение 162

Предметный указатель 170

Ответы 171

Список рекомендуемой литературы 175

Глава I

Векторы и координаты

Векторы и координаты — это важнейшие понятия современной математики. Они используются и в других науках: физике, астрономии, географии. В этой главе речь пойдёт о том, как они применяются в геометрии.

§ 1. Понятие вектора

1.1. Скалярные и векторные величины. Направленные отрезки

Многие величины полностью характеризуются своими численными значениями: длина, площадь, объём, температура, масса, цена и т. д. Такие величины называют **скалярными величинами** или, короче, **скалярами**. Но есть и такие величины, которые характеризуются не только своими численными значениями, но и направлением: сила, скорость, перемещение. Например, мало знать, что скорость автомобиля равна 50 км/ч, — надо ещё знать, в каком направлении движется этот автомобиль. Ещё пример: мы знаем, что туристы переместились на 10 км. Но куда? На север, на юг, на запад, на восток? Надо ещё знать направление. Его обычно указывают стрелкой (рис. 1).

Рис. 1

Величины, которые характеризуются численными значениями и направлениями, называют **векторными величинами** или, короче, **векторами**. Численное значение вектора называют его **модулем** (или **абсолютной величиной**). Такое определение вектора даётся в курсе физики.

Простейший пример векторной величины представляет перемещение. Перемещение характеризуется расстоянием и направлением. Если тело переместилось из точки A в точку B, то это перемещение естественно изобразить отрезком, направленным из точки A в точку B (рис. 2, а).

Так появляется **направленный отрезок**. Направленным отрезком называют отрезок, у которого указан порядок концов: первый конец отрезка считают его *началом*, а второй — так и называют *концом*.

Рисуют направленный отрезок со стрелкой на конце (рис. 2, б). Обозначают направленный отрезок с началом A и концом B так: $\overrightarrow{AB}$.

Две точки A и B задают два направленных отрезка: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$. И в то время как отрезки AB и BA — это два разных названия одного и того же отрезка, направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ различны.

Говорят, что направленные отрезки **$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ параллельны (перпендикулярны)**, если параллельны (перпендикулярны) прямые AB и CD.

Для обозначения параллельности и перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ употребляются обычные символы: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ (рис. 3).

Направленные отрезки в геометрии кратко называют **векторами**.

Будем говорить о векторах, как об отрезках: *вектор лежит на данной прямой, вектор перпендикулярен* (или *параллелен*) *данной прямой* и т. п.

Взаимно перпендикулярные векторы также называются **ортогональными** векторами.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ — это длина отрезка AB: $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$. Поэтому в геометрии модуль вектора называется также **длиной вектора**.

Определение. Коллинеарными называются векторы, которые параллельны или лежат на одной прямой (рис. 4).

Справка словесника. Слово *vector* латинское и в переводе означает *переносчик (переносящий, несущий)*. Вектор $\overrightarrow{AB}$ как бы переносит начало вектора — точку A в его конец — точку B.

Слово *модуль* происходит от латинского слова *modulus* и переводится как *мера*. Слова *модуль, мода, модификация (изменение)* — однокоренные слова.

В слове *коллинеарный* латинская приставка *col* имеет значение *с-*, *со-*, а латинский корень *linea* означает прямую линию, т. е. это слово го-

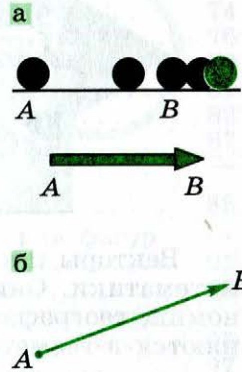


Рис. 2

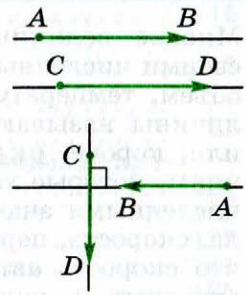


Рис. 3

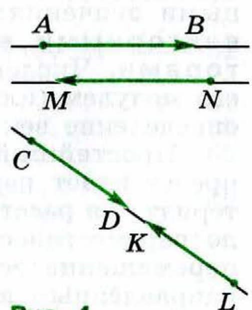


Рис. 4

ворит о векторах, *идущих вместе с некоторой прямой*. (Обратите внимание, что эта же приставка в словах *коллегия, коллектив, коллекция*.)

Слово *ортогональный* в переводе с греческого означает *прямоугольный*.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается векторная величина от скалярной?
2. Приведите примеры векторных и скалярных величин.
3. Что такое направленный отрезок? Чем он отличается от отрезка?
4. Какие направленные отрезки называются параллельными? перпендикулярными?
5. Какие векторы называются коллинеарными? ортогональными?

ЗАДАЧИ

Смотрим

1.1. Дан прямоугольник $ABCD$. Назовите векторы, заданные вершинами прямоугольника. Какие из них: а) лежат на прямой AC; б) параллельны прямой CD; в) перпендикулярны прямой BC?

1.2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Назовите векторы, заданные его вершинами и точкой пересечения диагоналей. Какие из них: а) коллинеарны $\overrightarrow{AB}$; б) коллинеарны $\overrightarrow{AC}$; в) коллинеарны $\overrightarrow{BO}$?

1.3. Дан квадрат $ABCD$. Назовите векторы, заданные его вершинами и перпендикулярные: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AC}$.

1.4. В равностороннем треугольнике ABC проведены медианы AK и BM и средняя линия KM. Назовите коллинеарные и взаимно перпендикулярные векторы, заданные точками A, B, C, K, M.

1.5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите вектор, заданный его вершинами и: а) коллинеарный вектору $\overrightarrow{AD}$; б) коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$; в) коллинеарный вектору $\overrightarrow{AA_1}$; г) коллинеарный вектору $\overrightarrow{AC}$; д) перпендикулярный вектору $\overrightarrow{AD}$; е) перпендикулярный вектору $\overrightarrow{BD}$; ж) параллельный плоскости BB_1C_1; з) перпендикулярный плоскости CDD_1.

1.6. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ с основанием $ABCD$ её боковые грани являются правильными треугольниками. Назовите взаимно перпендикулярные векторы, заданные вершинами пирамиды. Есть ли среди этих векторов такие, которые лежат на боковых рёбрах пирамиды?

Рисуем

1.7. Нарисуйте прямую a, а затем вектор: а) лежащий на прямой a; б) параллельный прямой a; в) перпендикулярный прямой a.

1.8. Нарисуйте какой-либо вектор, а затем вектор: а) параллельный данному; б) коллинеарный данному; в) перпендикулярный данному.

1.2. Сонаправленность векторов

Слово *направление* чаще всего связано с движением: пешехода, корабля, самолёта, поезда (рис. 5) и т. п.

Когда говорят, что корабли идут в одном направлении, то имеют в виду, что они следуют друг за другом или идут параллельными курсами (рис. 6, а). Их перемещения изобразятся векторами, имеющими одинаковые направления (рис. 6, б). О таких векторах говорят, что они **сонаправлены**.

Наглядным представлениям о сонаправленных векторах можно дать точное определение. Это можно сделать по-разному. Для векторов, лежащих на одной плоскости, мы поступим так.

Определение. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на плоскости (а также лучи AB и CD) называются **сонаправленными**, если лучи AB и CD лежат в какой-либо одной полуплоскости этой плоскости и перпендикулярны её границе (рис. 7).

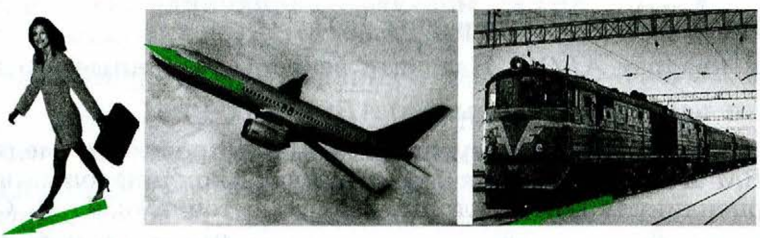


Рис. 5

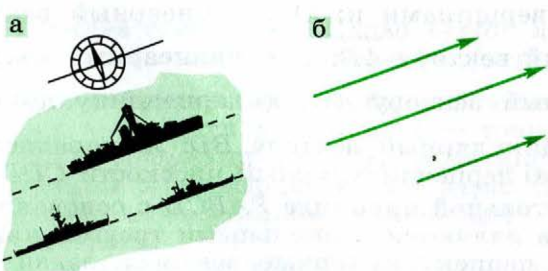


Рис. 6

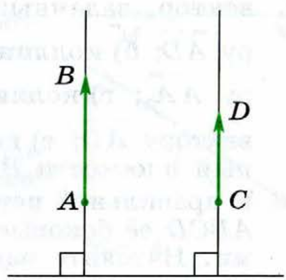


Рис. 7

На плоскости векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (а также лучи AB и CD) сонаправлены, если лучи AB и CD перпендикулярны некоторой прямой и лежат с одной стороны от неё.

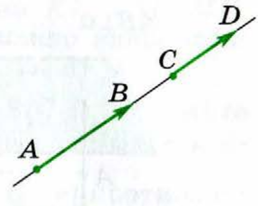


Рис. 8

Из этого определения сразу же следует, что *сонаправленные векторы коллинеарны*, т. е. параллельны или лежат на одной прямой.

Ясно, что *векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, сонаправлены тогда и только тогда, когда один из лучей AB или CD содержит другой луч* (рис. 8). *А параллельные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены тогда и только тогда, когда лучи AB и CD лежат по одну сторону от прямой AC* (рис. 9).

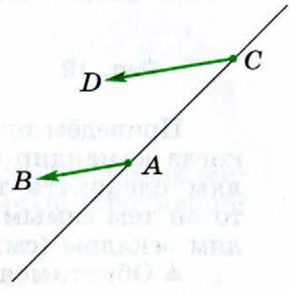


Рис. 9

Если векторы коллинеарны, но не сонаправлены, то их называют **противоположно направленными**.

Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, то пишут $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположно направлены, то пишут $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Чтобы установить сонаправленность двух векторов, можно (кроме определения сонаправленности) использовать *признак сонаправленности*: **два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены.**

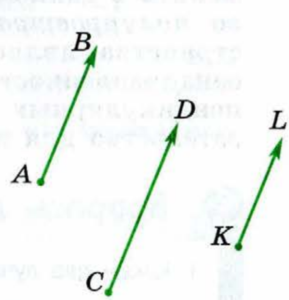


Рис. 10

Доказательство. Пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены с вектором $\overrightarrow{KL}$ (рис. 10). Докажем, что $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$, то лучи AB и KL лежат в некоторой полуплоскости α и перпендикулярны её границе — прямой p (рис. 11).

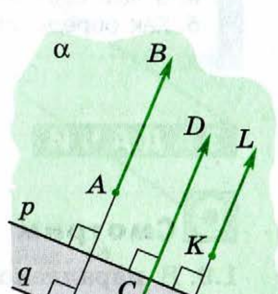


Рис. 11

Аналогично поскольку $\overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$, то лучи CD и KL лежат в некоторой полуплоскости β и перпендикулярны её границе — прямой q. Поскольку прямые p и q перпендикулярны прямой KL, то они параллельны (или совпадают). Следовательно, одна из полуплоскостей α или β содержит другую полуплоскость (на рисунке 11 это полуплоскость β). В этой полуплоскости и лежат все три луча AB, CD, KL, и все они перпендикулярны её границе. Итак, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. ■

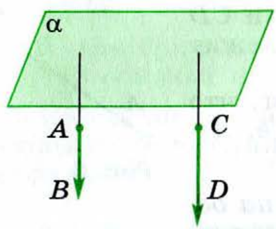


Рис. 12

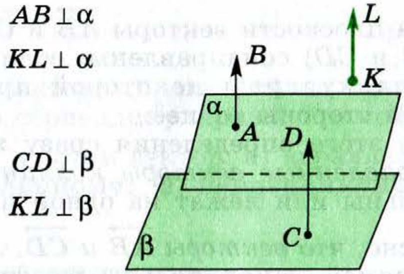


Рис. 13

Приведём пример из практики, иллюстрирующий этот признак: когда командир флагманского корабля командует остальным кораблям следовать тем же курсом, которым следует его корабль, то он тем самым обеспечивает одинаковый курс любым двум кораблям эскадры (см. рис. 6, а).

▲ Обратимся теперь к векторам в пространстве. Чтобы определить сонаправленность векторов в пространстве, достаточно заменить в данном выше определении слово *полуплоскость* на слово *полупространство* (рис. 12). Поскольку границей полупространства является плоскость, то в доказательстве признака сонаправленности речь пойдёт не о прямых, а о плоскостях, перпендикулярных одной прямой KL (рис. 13). Повторите это доказательство для пространственного случая. ▼

Вопросы для самоконтроля

1. Какие два луча на плоскости называются сонаправленными?
2. Какие два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются сонаправленными?
3. Какие два вектора называются противоположно направленными?
4. В чём состоит признак сонаправленности векторов?
5. Как определить сонаправленность лучей и векторов в пространстве?

ЗАДАЧИ

Смотрим

1.9. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Назовите векторы: а) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{AB}$; б) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{AC}$; в) противоположно направленные вектору $\overrightarrow{DO}$.

1.10. В треугольнике ABC проведены средние линии KL, LM, MK. Назовите пары сонаправленных и противоположно направленных векторов, заданных точками A, B, C, K, L, M.

1.11. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите вектор, заданный его вершинами и: а) сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AD}$; б) сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AB}$; в) противоположно направленный вектору $\overrightarrow{AA_1}$; г) сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AC}$.

Рисуем

1.12. Нарисуйте какой-либо вектор, а затем вектор: а) сонаправленный с нарисованным вектором; б) направленный противоположно нарисованному вектору.

Представляем

1.13. Что можно сказать о направлении векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$?

1.14. Точка M лежит на прямой AB. В каком случае векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ сонаправлены? А когда они направлены противоположно?

1.15. Известно, что $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ и $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$. Каково взаимное расположение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$?

1.3. Равенство векторов

Векторы полностью характеризуются длиной и направлением. Поэтому дадим такое

Определение. Два вектора называются **равными**, если, во-первых, их длины равны и, во-вторых, они сонаправлены (рис. 14).

Итак, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если:

1) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и 2) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

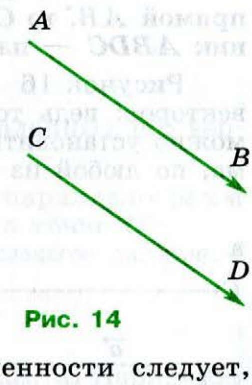


Рис. 14

Из этого определения и признака сонаправленности следует, что равенство векторов обладает обычным свойством:

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК *равенства векторов*. **Два вектора, равные третьему вектору, равны.**

□ Действительно, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KL}$, то, во-первых, $|AB| = |KL|$ и $|CD| = |KL|$, т. е. $|AB| = |CD|$. Во-вторых, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$, т. е. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Так как $|AB| = |CD|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. ■

Если задан вектор $\overrightarrow{AB}$ и дана некоторая точка C, то найдётся единственная точка D, такая, что $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, т. е. *от любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.*

□ Чтобы построить эту точку D, из точки C проведём луч p, сонаправленный с лучом AB (рис. 15, а). Такой луч p лишь один.

Теперь на луче p откладываем отрезок CD, равный отрезку AB (рис. 15, б). Точка D построена. Ясно, что такая точка лишь одна. ■

Если $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ и точка C не лежит на прямой AB, то четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм (напомним, что *четырёхугольник, в котором две противоположные стороны равны и параллельны, — параллелограмм*). Верно и обратное утверждение: *если четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$* (рис. 16). Действительно, в этом случае векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены и имеют равные длины.

Объединяя эти два взаимно обратных утверждения, получаем

ВТОРОЙ ПРИЗНАК *равенства векторов.* **Если точка C не лежит на прямой AB, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм.**

Рисунок 16 подсказывает нам ещё один признак равенства векторов: ведь то, что четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм, можно установить, используя применённый признак параллелограмма, по любой из его пар противоположных сторон. Поэтому

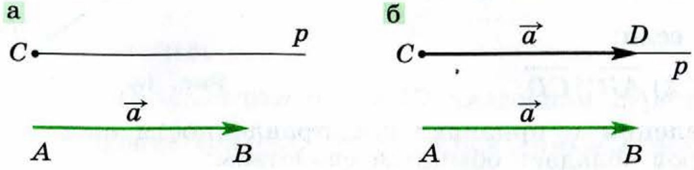


Рис. 15

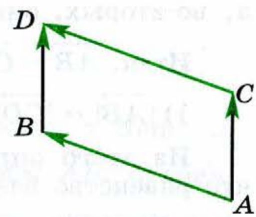


Рис. 16

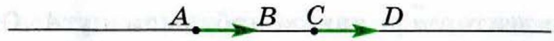


Рис. 17

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК *равенства векторов.* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **тогда и только тогда, когда** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

□ Этот признак справедлив и для точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой. Введём на этой прямой координату x, и пусть числа x_A, x_B, x_C, x_D — координаты этих точек (рис. 17). Тогда условие $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ означает, что выполнено равенство

$$x_B - x_A = x_D - x_C. \qquad (1)$$

Из равенства (1) вытекает

$$x_C - x_A = x_D - x_B. \qquad (2)$$

А равенство (2) и означает для векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, лежащих на одной прямой, равенство их длин и их сонаправленность, т. е. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Чем определяется равенство двух векторов?
2. Какие вам известны признаки равенства двух векторов?

ЗАДАЧИ

Смотрим

1.16. Дан прямоугольник $ABCD$. Среди векторов, заданных его вершинами, укажите равные.

1.17. Даны: а) отрезок AB и его середина O; б) параллелограмм $ABCD$ и две его диагонали, пересекающиеся в точке O. Среди векторов, заданных этими точками, укажите равные.

Рисуем

1.18. Нарисуйте прямую и на ней две точки A и B. а) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AB}$ и вектор $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. б) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{BA}$ и вектор $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$. в) Равны ли векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$?

1.19. Нарисуйте вектор $\vec{a}$ и какую-нибудь точку A. Отложите от неё вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. От точки B отложите вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$. Нарисуйте такую точку X, что $\overrightarrow{XA} = \vec{a}$.

1.20. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Среди векторов, заданных его вершинами, укажите равные. б) От точки A отложите вектор, равный: $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DD_1}$. в) Выполните те же задания, что и в предыдущем пункте, для середины ребра B_1C_1.

Представляем

1.21. Сколько пар равных векторов задаются вершинами треугольной призмы?

Исследуем

1.22. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Какие ещё равные векторы можно задать этими точками A, B, C, D?

1.23. Нарисуйте треугольник ABC. Нарисуйте точку K и отложите векторы $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{AC}$. Что вы заметили? Как вы это объясните?

1.24. Нарисуйте треугольник. От всех его точек отложите равные векторы. Концы этих векторов образуют новую фигуру. Сравните её с нарисованным треугольником. Какое предположение вы сможете сделать? Сможете ли вы его обосновать?
Решите аналогичные задачи для окружности и для куба.

1.4. О понятии вектора

Когда говорят *отрезок* AB, то имеют в виду, что заданы его концы A и B. Но когда говорят *задан отрезок* a, то имеют в виду, что известна лишь длина отрезка и можно взять любой из отрезков этой длины. Так и с векторами. Когда говорят *вектор* $\overrightarrow{AB}$, то имеют в виду направленный отрезок, у которого известны его начало A, его конец B, а потому известны его длина $|AB|$ и его направление — от A к B. Начиная изучать векторы, мы в п. 1.1 говорили, что векторами называются величины, которые характеризуются численными величинами и направлениями. В геометрии численная величина вектора — это его длина. Поэтому в геометрии вектор задаётся (характеризуется) своей длиной и направлением, а задать такой вектор можно любым направленным отрезком этой длины и этого направления: все такие направленные отрезки равны друг другу (п. 1.3). От какой точки отложен такой вектор — несущественно. Поскольку длина любого отрезка положительна, то те векторы, которые задаются направленными отрезками, называют *ненулевыми*.

Ненулевой вектор наглядно представляют всегда как направленный отрезок, но какой из равных друг другу направленных отрезков берётся — это безразлично либо определяется дополнительными соображениями.

Если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ задаёт вектор $\vec{a}$, то пишем $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и говорим: «Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен вектору $\vec{a}$» (рис. 18). Модулем этого вектора $\vec{a}$ считается длина отрезка AB: $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

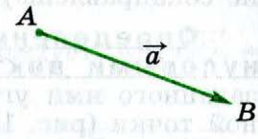


Рис. 18

Из всех векторов особый случай представляет **нулевой вектор**, или **нуль-вектор**: его модуль равен нулю, а направления он не имеет. Обозначается нуль вектор так: $\vec{0}$.

Можно сказать, что нулевой вектор задаётся любой точкой, которая рассматривается как начало и конец этого вектора.

Поэтому *равенство* $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ *означает, что точки* A *и* B *совпадают.*

После того как появился нуль-вектор, уже нельзя сказать, что каждый вектор задаётся направленным отрезком (каждый, кроме нулевого).

Нуль-вектор считается коллинеарным и ортогональным любому вектору.

В этом пункте мы расширили понятие вектора. Во-первых, определили нуль-вектор. Во-вторых, ненулевой вектор мы теперь понимаем в двух смыслах: и как направленный отрезок, и как любой из равных друг другу направленных отрезков.

Такая двойственность понимания может поначалу вызвать затруднение. Не надо смущаться — к ней привыкнешь по мере изучения векторов и обращения с ними.

Вопросы для самоконтроля

1. Как задаётся вектор в геометрии?
2. Как задаётся нуль-вектор? Чему равен его модуль? Есть ли у него направление?

Рассуждаем

1.25. Какие утверждения можно получить, если известно, что: а) $\overrightarrow{KL} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; в) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$?

1.5. Угол между векторами

Начнём с простого частного случая: *если векторы сонаправлены, то угол между ними полагается равным* $0°$. В общем случае (когда векторы не сонаправлены) даётся такое определение.

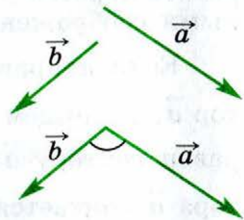


Рис. 19

Определение. **Углом между двумя ненулевыми векторами** называется величина заданного ими угла, когда они отложены от одной точки (рис. 19).

Обозначать угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем так: $\angle \vec{a}\,\vec{b}$. Таким образом, $\angle \vec{a}\,\vec{b} = \angle AOB$, если $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Обратите внимание на то, что угол между векторами — это величина, а не фигура.

Из данного определения также следует, что *угол между противоположно направленными векторами равен* $180°$.

Данное определение угла между векторами требует уточнения: следует установить, что величина угла AOB не зависит от выбора точки O. (Как говорят в математике, требуется установить *корректность* данного определения.)

В самом деле, пусть мы хотим найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Их можно отложить от любой точки (рис. 20). Возникает вопрос: а будут ли равны полученные при этом углы? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

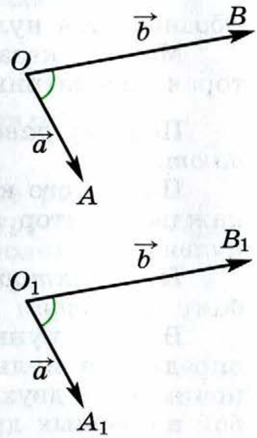


Рис. 20

Теорема (*об углах с сонаправленными сторонами*). **Углы, стороны которых сонаправлены, равны.**

Доказательство. Рассмотрим два угла, стороны которых сонаправлены: $\angle ab$ с вершиной O и $\angle a_1b_1$ с вершиной O_1 (рис. 21). Считаем, что $a \uparrow\uparrow a_1$ и $b \uparrow\uparrow b_1$. Покажем, что $\angle ab = \angle a_1b_1$.

Отложим на лучах a и a_1 равные друг другу отрезки OA и O_1A_1, а на лучах b и b_1 равные друг другу отрезки OB и O_1B_1 (рис. 22). Так как $OA = O_1A_1$ и $a \uparrow\uparrow a_1$, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O_1A_1}$. Из этого ра-

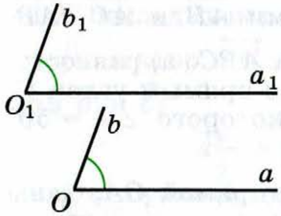


Рис. 21

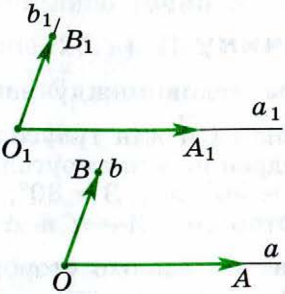


Рис. 22

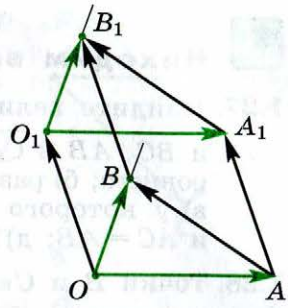


Рис. 23

венства и третьего признака равенства векторов следует, что $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1}$ (рис. 23).

Аналогично так как $OB = O_1B_1$ и $b \uparrow\uparrow b_1$, то $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O_1B_1}$ и $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{BB_1}$. Поскольку $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{BB_1}$, то $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ (снова по третьему признаку равенства векторов).

Итак, соответственные стороны треугольников OAB и $O_1A_1B_1$ равны: $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$, $AB = A_1B_1$. Поэтому $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, т. е. $\angle ab = \angle a_1b_1$. ■

Ещё раз подчеркнём, что понятие угла между векторами, а также сонаправленности и противоположной направленности векторов определяется лишь для ненулевых векторов.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит теорема об углах с сонаправленными сторонами?
2. Как определяется угол между ненулевыми векторами?
3. Чему равен угол между сонаправленными векторами?
4. Чему равен угол между противоположно направленными векторами?

ЗАДАЧИ

Рисуем

1.26. Нарисуйте векторы, образующие угол 30°: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$, где X — любая точка. Сделайте то же самое для угла 140°.

Находим величину

1.27. Найдите величины углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CA}$ для треугольника ABC: а) равностороннего; б) равнобедренного прямоугольного с прямым углом C; в) у которого $\angle A = 50°$ и $\angle B = 30°$; г) у которого $\angle A = 50°$ и $AC = AB$; д) у которого $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

1.28. Точки B и C лежат по разные стороны от прямой OA, даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Найдите угол между $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если: а) $\angle \vec{a}\,\vec{b} = 30°$, $\angle \vec{a}\,\vec{c} = 50°$; б) $\angle \vec{a}\,\vec{b} = 100°$, $\angle \vec{a}\,\vec{c} = 120°$; в) $\angle \vec{a}\,\vec{b} = \alpha$, $\angle \vec{a}\,\vec{c} = \beta$.

1.29. Три вектора расположены на плоскости так, что угол между любыми двумя из них один и тот же. Чему равен этот угол?

1.30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какой угол образуют между собой векторы: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$; б) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{B_1C}$; г) $\overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{B_1D}$; е) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{D_1A}$?

§2. Сложение и вычитание векторов

2.1. Сложение векторов

Если тело переместилось из точки A в точку B (рис. 24, а), а потом из точки B переместилось в точку C (рис. 24, б), то его суммарное перемещение из точки A в точку C представляется вектором $\overrightarrow{AC}$ (рис. 24, в). Так складываются векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

В рассмотренном случае конец первого вектора $\overrightarrow{AB}$ является началом второго вектора $\overrightarrow{BC}$. В общем же случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ складываются так.

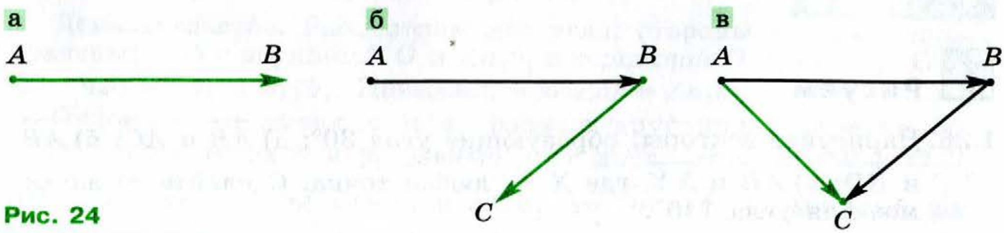


Рис. 24

Откладывают от какой-либо точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 25, а). Потом от точки B откладывают вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ представляет **сумму векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \qquad (2)$$

Это правило получения суммы двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **правилом треугольника** (потому что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ не лежат на одной прямой, то их сумма представляет сторону AC треугольника ABC).

Мы определили сумму данных векторов, отложенную от данной точки. А что будет, если взять другую точку? Оказывается, что сумма получится равной прежней. А именно, если отложить от точки A_1 тот же вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$, а затем от точки B_1 отложить вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}$, то сумма $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$ будет равна вектору $\overrightarrow{AC}$, полученному в равенстве (2), т. е. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 25, б). Докажем это.

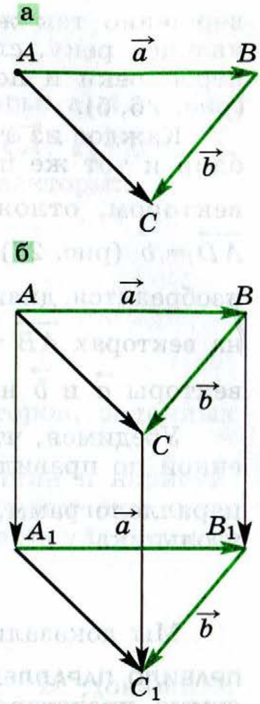


Рис. 25

□ Так как $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$, то, согласно третьему признаку равенства векторов, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$. Аналогично из равенства $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}$ следует равенство $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Поэтому $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, а тогда по третьему признаку равенства векторов $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$. ■

Правило треугольника естественно применяется при последовательных перемещениях тела: сначала перемещение $\overrightarrow{AB}$, затем $\overrightarrow{BC}$, а в сумме получаем перемещение $\overrightarrow{AC}$. А если тело одновременно испытывает два перемещения? Например, человек, идущий по палубе плывущего корабля. Одно перемещение — это его перемещение вместе с кораблём, другое — по палубе (рис. 26, а). В сумме человек перемещается по диагонали параллелограмма, стороны которого — это перемещение корабля и перемещение по палубе. Со-

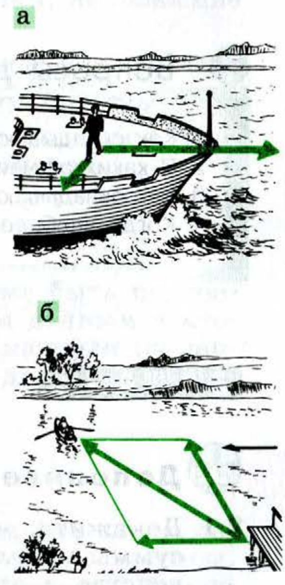


Рис. 26

вершенно так же перемещение лодки, пересекающей реку, слагается из её перемещения поперёк реки и по течению, т. е. вместе с водой (рис. 26, б).

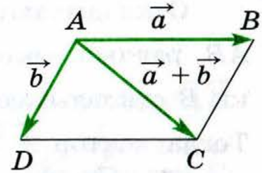


Рис. 27

Каждое из этих слагаемых перемещений (за один и тот же промежуток времени) изобразим вектором, отложенным от точки A: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (рис. 27). Тогда суммарное перемещение изобразится диагональю $\overrightarrow{AC}$ параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. (Рассматриваем лишь случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.)

Убедимся, что вектор $\overrightarrow{AC}$ будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, построенной по правилу треугольника. Действительно, так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Поэтому $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. По правилу треугольника

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \text{ т. е. } \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Мы доказали

ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА **Если векторы не коллинеарны, то их сумма представляется диагональю построенного на них параллелограмма.**

Вопросы для самоконтроля

1. Как складываются два вектора по правилу треугольника?
2. В каких случаях удобно применять правило треугольника?
3. Как складываются два вектора по правилу параллелограмма?
4. Когда удобнее применять правило параллелограмма?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

2.1. Докажите, что модуль суммы двух векторов не превосходит суммы модулей этих векторов. Выясните, когда имеет место равенство в этом нестрогом неравенстве. Обобщите данный результат на большее число слагаемых.

Рисуем

2.2. Нарисуйте треугольник ABC. Нарисуйте векторы: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$; е) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$.

2.3. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Нарисуйте векторы:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$;
г) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; д) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$;
ж) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$; з) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$; и) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;
к) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$; л) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; м) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA}$.

Представьте вектор $\overrightarrow{BA}$ как сумму двух векторов, заданных вершинами параллелограмма.

2.4. Нарисуйте куб. Выберите любую пару его вершин и нарисуйте вектор, заданный этими вершинами. Нарисуйте ещё один вектор, полученный таким же способом. Нарисуйте сумму этих векторов.

Доказываем

2.5. Нарисуйте на плоскости четыре точки A, B, C, D. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Составьте другие аналогичные равенства. Можно ли эти равенства перенести на точки, не лежащие в одной плоскости?

2.6. Точки A, B, C, D являются серединами последовательных сторон четырёхугольника. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Докажите это равенство для случая, когда данные точки являются серединами отрезков четырёхзвенной замкнутой ломаной.

Исследуем

2.7. Даны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Может ли: а) их сумма быть перпендикулярной одному из данных векторов; обоим данным векторам; б) их сумма образовывать равные углы с каждым из данных векторов; в) длина их суммы быть равна длине одного из векторов; обоих векторов?

Применяем геометрию

2.8. Самолёт пролетел 200 км на юго-запад, а затем 300 км на запад. Сделайте соответствующий рисунок, используя векторы. На каком расстоянии он оказался от начальной точки? Придумайте сами похожую задачу.

2.2. Свойства сложения векторов

У операции сложения векторов те же свойства, что и у операции сложения чисел.

СВОЙСТВО 1 **Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$**

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad (3)$$

(***переместительный закон, или коммутативность сложения***).

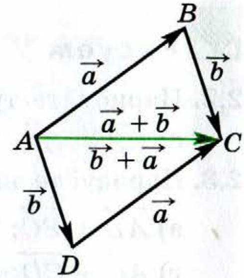


Рис. 28

Доказательство. Возможны два случая. 1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Тогда отложим их от точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, а затем построим на них параллелограмм $ABCD$ (рис. 28). Поскольку $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, то имеет место равенство (3).

2) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ лежат на одной прямой (рис. 29). На той же прямой лежат векторы $\overrightarrow{AB_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{a}$. Надо доказать, что точки C и C_1 совпадают. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то это следует из сложения отрезков (рис. 29, а). А если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены противоположно, то это следует из вычитания отрезков (рис. 29, б). Подробное доказательство желающие могут завершить самостоятельно. ■

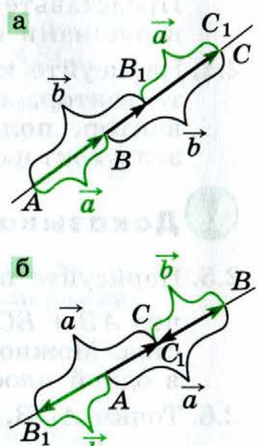


Рис. 29

СВОЙСТВО 2 **Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$**

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \qquad (4)$$

(***сочетательный закон, или ассоциативность сложения***).

Доказательство. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, а затем вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ и вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 30). Тогда

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

и, с другой стороны,

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$,

т. е. справедливо равенство (4). ■

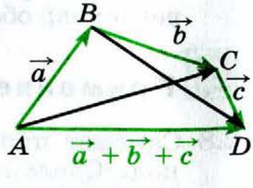


Рис. 30

Пользуясь этим законом, можно группировать слагаемые при любом их числе. Поэтому суммы векторов пишут, никак не объединяя слагаемые скобками:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \text{ и т. д.}$$

Из сочетательного и переместительного законов следует, что, складывая любое число векторов, можно как угодно переставлять и группировать слагаемые (так же как и числа). Часто это значительно облегчает сложение при числе слагаемых, большем двух.

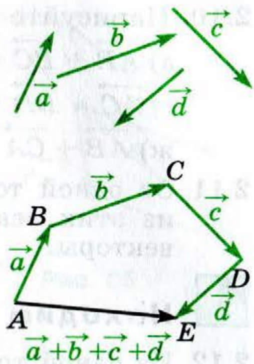


Рис. 31

Чтобы сложить несколько векторов, например векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, удобно построить векторную ломаную (рис. 31). Эта ломаная состоит из направленных отрезков $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$. Вектор $\overrightarrow{AE}$, идущий от начала ломаной $ABCDE$ в её конец, и является суммой: $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

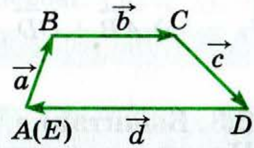


Рис. 32

Если ломаная получилась замкнутой, то сумма векторов равна нуль-вектору (рис. 32). Отметим ещё очевидное *свойство нуль-вектора*:

свойство 3 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит переместительный закон сложения векторов?
2. Как ещё называют переместительный закон?
3. В чём состоит сочетательный закон сложения векторов?
4. Как ещё называют сочетательный закон?
5. Как получить сумму векторной ломаной? Когда эта сумма равна нулю?
6. Когда суммарной векторной ломаной является нуль-вектор?
7. Какой закон позволяет не ставить скобки при сложении векторов?

ЗАДАЧИ

Рисуем

2.9. Нарисуйте треугольник ABC. Нарисуйте векторы:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$; г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$.

2.10. Нарисуйте четырёхугольник $ABCD$. Нарисуйте векторы:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$;
г) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$; е) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$;
ж) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$.

2.11. От одной точки отложены три вектора равной длины. Один из этих векторов равен сумме двух других. Нарисуйте эти векторы.

Находим величину

2.12. Из одной точки выходят три вектора, лежащие в одной плоскости. Длина каждого равна a. Они образуют между собой углы $120°$. Чему равна длина их суммы? В какой известной басне И. А. Крылова описана аналогичная ситуация?

2.13. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равна длина вектора:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{A_1C_1}$; б) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{A_1C_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{D_1A}$?

2.3. Вычитание векторов. Противоположные векторы

Как и вычитание чисел, *вычитание векторов — это действие, обратное сложению.* Поэтому **разностью $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, дающий в сумме с вектором $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$: $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

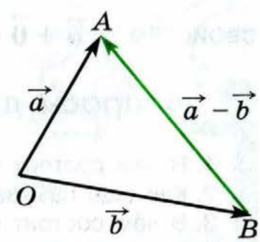


Рис. 33

Разность двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить так. Отложим от какой-либо точки O векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 33). Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ и будет разностью $\vec{a} - \vec{b}$, поскольку $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$. Поэтому можно написать

$$\vec{c} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Вычитание можно свести к сложению, если ввести понятие противоположного вектора. Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если их длины равны и они направлены противоположно (рис. 34). Каждый из них называется противоположным другому. Нуль-вектор считается противоположным самому себе.

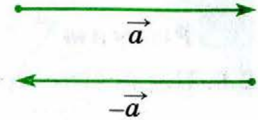


Рис. 34

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$ (читается «минус a»).

Как при сложении противоположных чисел получается нуль, так и **при сложении противоположных векторов в сумме получится нуль-вектор.**

Теперь мы можем утверждать, что *результат вычитания из вектора $\vec{a}$ вектора $\vec{b}$ тот же, что и результат сложения векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$.*

Доказательство (для неколлинеарных векторов) ясно из рисунка 35.

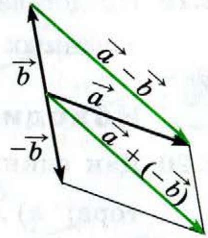


Рис. 35

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вектор называется разностью двух векторов?
2. Какие два вектора называются противоположными?
3. Какими способами можно получить разность двух векторов?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

2.14. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ для любой точки O.

Рисуем

2.15. Нарисуйте треугольник ABC. Нарисуйте векторы: а) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$; е) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

2.16. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Нарисуйте векторы:
а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}$; г) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}$; д) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD}$; ж) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

2.17. Нарисуйте иллюстрации к таким векторным равенствам: а) $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$; б) $-(\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b}$; в) $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; г) $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Представляем

2.18. Представьте себе параллелограмм $ABCD$. Разностью каких векторов, заданных его вершинами, является вектор: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{DC}$?

2.19. Представьте себе тетраэдр $ABCD$. Разностью каких векторов, заданных его вершинами, является вектор: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{DC}$?

Находим величину

2.20. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равна длина вектора: а) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA_1}$; д) $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{D_1C_1}$?

Доказываем

2.21. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Докажите, что для любой точки O верно равенство $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$. Верно ли обратное утверждение?

Исследуем

2.22. Вместе с двумя неколлинеарными векторами рассмотрим их сумму и разность. Может ли быть так, что: а) их разность перпендикулярна их сумме; б) их разность параллельна их сумме; в) равны модули их суммы и их разности; г) модуль разности больше модуля их суммы; д) один из данных векторов образует равные углы и с их суммой, и с их разностью?

§3. Умножение вектора на число

3.1. Умножение вектора на число

Если в сумме векторов одно и то же слагаемое повторяется несколько раз, например $\vec{a} + \vec{a}$, $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ и т. п., то, как и в алгебре, такие суммы естественно обозначать $2\vec{a}$, $3\vec{a}$ и т. д. (рис. 36).

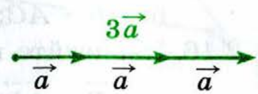


Рис. 36

Если точка C — середина отрезка AB, то $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, а потому $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (рис. 37).

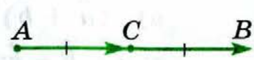


Рис. 37

Уже эти простые примеры подсказывают, что удобно ввести операцию умножения вектора на число и как дать соответствующее определение.

Определение. **Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на отличное от нуля число x** называется такой вектор $x\vec{a}$, для которого выполняются два условия: 1) его длина равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа x, т. е. выполняется равенство

$$|x\vec{a}| = |x||\vec{a}|; \qquad (1)$$

2) он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $x > 0$ (рис. 38, а), и он направлен противоположно вектору $\vec{a}$, если $x < 0$ (рис. 38, б).

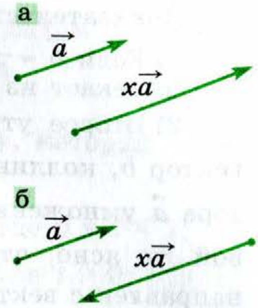


Рис. 38

Если же $\vec{a}$ — нуль-вектор или число $x = 0$, то вектор $x\vec{a}$ нулевой.

Это согласуется с равенством (1).

Из данного определения непосредственно вытекают такие свойства операции умножения вектора на число:

свойство 1 $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ **для любого вектора** $\vec{a}$.

свойство 2 $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ **для любого вектора** $\vec{a}$.

свойство 3 **Если** $x\vec{a} = \vec{0}$, **то либо** $x = 0$, **либо** $\vec{a} = \vec{0}$.

свойство 4 **Если** $x\vec{a} = y\vec{a}$ **и** $\vec{a} \neq \vec{0}$, **то** $x = y$.

свойство 5 **Если** $x\vec{a} = x\vec{b}$ **и** $x \neq 0$, **то** $\vec{a} = \vec{b}$.

свойство 6 $x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}$ **для любого вектора** $\vec{a}$ **и любых чисел** x **и** y.

Доказывая эти векторные равенства, каждый раз следует проверять равенство модулей и сонаправленность векторов. Продемонстрируем это, например, для свойства 4.

□ Из равенства $x\vec{a} = y\vec{a}$ следует, что $|x\vec{a}| = |y\vec{a}|$. Согласно равенству (1) получаем, что $|x||\vec{a}| = |y||\vec{a}|$. Так как $|\vec{a}| \neq 0$, то $|x| = |y|$. Кроме того, числа x и y имеют один и тот же знак, так как в противном случае векторы $x\vec{a}$ и $y\vec{a}$ были бы направлены противоположно. Поэтому $x = y$. ■

Свойства 1—3 очевидны.

Свойства 5 и 6 доказываются так же, как свойство 4. Убедитесь в их справедливости самостоятельно.

Операция умножения векторов даёт возможность сформулировать и доказать простой, но важный признак коллинеарности векторов.

Теорема (*характерное свойство коллинеарности*). **Вектор** $\vec{b}$ **коллинеарен ненулевому вектору** $\vec{a}$ **тогда и только тогда, когда** $\vec{b} = x\vec{a}$.

Доказательство. В этой теореме два утверждения.

1) Если $\vec{b} = x\vec{a}$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ коллинеарны. Это утверждение вытекает из определения умножения вектора на число.

2) Второе утверждение обратно первому и состоит в том, что вектор $\vec{b}$, коллинеарный ненулевому вектору $\vec{a}$, получается из вектора $\vec{a}$ умножением его на некоторое число x. Если вектор $\vec{b}$ нулевой, то ясно, что $x = 0$. Если вектор $\vec{b}$ ненулевой, то он либо сонаправлен с вектором $\vec{a}$ (рис. 39, а), либо направлен противоположно вектору $\vec{a}$ (рис. 39, б).

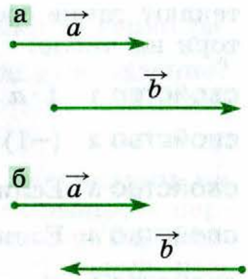


Рис. 39

В первом случае $x = |\vec{b}| : |\vec{a}|$. Во втором случае $x = -|\vec{b}| : |\vec{a}|$. В обоих случаях $|x\vec{a}| = |x||\vec{a}| = |\vec{b}|$ и векторы $x\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены: в первом случае они оба сонаправлены с вектором $\vec{a}$, а во втором случае они оба направлены противоположно вектору $\vec{a}$. Поэтому выполняется равенство $\vec{b} = x\vec{a}$. ■

Укажем полезное следствие этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ (*о векторах на прямой*). **Два ненулевых вектора, отложенные из одной и той же точки, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.**

Другими словами, точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = x\overrightarrow{AB}$ (рис. 40).

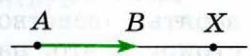


Рис. 40

Вопросы для самоконтроля

1. Как умножить ненулевой вектор на ненулевое число?
2. Какие свойства умножения вектора на число вы знаете?
3. В чём состоит характерное свойство коллинеарных векторов?

ЗАДАЧИ

Рисуем

3.1. Нарисуйте вектор $\vec{a}$. Нарисуйте векторы $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$, $\frac{1}{4}\vec{a}$, $-\frac{1}{3}\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$.

3.2. Нарисуйте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нарисуйте затем векторы: а) $2\vec{a} + 4\vec{b}$; б) $-2\vec{a} + 4\vec{b}$; в) $2\vec{a} - 4\vec{b}$; г) $-2\vec{a} - 4\vec{b}$.

3.3. Отметьте две точки A и B. Нарисуйте фигуру, которую образуют все точки X, такие, что:

а) $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$;
б) $\overrightarrow{BX} = t\overrightarrow{BA}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$;
в) $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$, где $t \geqslant 0$;
г) $\overrightarrow{BX} = t\overrightarrow{AB}$, где $t \geqslant 0$;
д) $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$, где $t \leqslant 0$;
е) $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$, где $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

3.4. Нарисуйте два единичных взаимно перпендикулярных вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Нарисуйте фигуру, которую образуют все точки K, такие, что $\overrightarrow{OK} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, если: а) $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; б) $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$; в) $|x| \leqslant 1$, $|y| \geqslant 1$. Что изменится в сделанном рисунке, если векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не будут перпендикулярными?

Находим величину

3.5. На отрезке AB длиной 20 см лежит точка C, причём $AC = 15$ см. Выразите: а) $\overrightarrow{AC}$ через $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC}$ через $\overrightarrow{AC}$.

3.6. На отрезке AB взята такая точка X, что $AX : XB = 2 : 1$. Выразите: а) $\overrightarrow{AX}$ через $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BX}$ через $\overrightarrow{XA}$; в) $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{BX}$. Сможете ли вы решить задачу в общем случае, когда $AX : XB = k$?

3.7. Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей. Обозначим $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, а $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы: а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{CO}$; в) $\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{CD}$; е) $\overrightarrow{DA}$.

3.8. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей. Обозначим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Выразите через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы: а) $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AC_1}$; г) $\overrightarrow{C_1A}$; д) $\overrightarrow{AB_1}$.

Ищем границы

3.9. Угол между единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ. В каких границах при изменении φ находится длина вектора: а) $\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $-2\vec{a} - \vec{b}$; в) $x\vec{a} + y\vec{b}$?

3.2. Распределительные законы умножения векторов на число

Операции сложения векторов и умножения вектора на число связаны двумя распределительными законами.

ПЕРВЫЙ ЗАКОН **Для любых чисел x и y и любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство**

$$(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}. \qquad (2)$$

В равенстве (2) даны лишь векторы, лежащие на одной прямой. Поэтому доказательство равенства (2) сводится к сложению или вычитанию отрезков в зависимости от знаков чисел x и y. Мы не будем перебирать все возможные случаи и оставляем их для самостоятельного рассмотрения.

ВТОРОЙ ЗАКОН **Для любого числа x и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство**

$$x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}. \qquad (3)$$

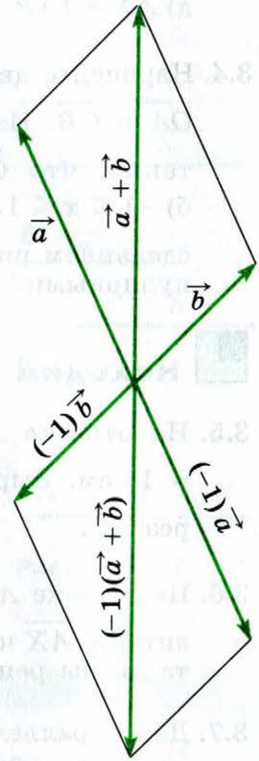


Рис. 41

Для натуральных множителей x равенство (3) вытекает из переместительного и сочетательного свойств сложения. Например, при $x = 3$ имеем

$$3(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) = $$
$$= 3\vec{a} + 3\vec{b}.$$

Аналогичное рассуждение проводится и для любого натурального x.

Очевидно, что равенство (3) верно при $x = -1$, т. е.

$$(-1)(\vec{a} + \vec{b}) = (-1)\vec{a} + (-1)\vec{b} \text{ (рис. 41).}$$

Следовательно, равенство (3) верно и при целом отрицательном x. Например,

$$(-3)(\vec{a}+\vec{b}) = (-1)(3(\vec{a}+\vec{b})) = (-1)(3\vec{a}+3\vec{b}) =$$
$$= (-1)3\vec{a} + (-1)3\vec{b} = (-3)\vec{a} + (-3)\vec{b}.$$

★ Рассмотрим теперь случай, когда $x = \frac{1}{p}$, где p — натуральное число. Пусть, например, $x = \frac{1}{2}$, т. е. $p = 2$. Положим $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ и $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Тогда, как уже доказано, $2\vec{d} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$. Из равенства $2\vec{c} = 2\vec{d}$ следует, что $\vec{c} = \vec{d}$, т. е. равенство (3) верно для $x = \frac{1}{2}$. Повторите это рассуждение для произвольного натурального числа p.

Из рассмотренных случаев следует, что равенство (3) верно для любого рационального $x = \frac{k}{p}$ (k — целое, а p — натуральное число). Действительно,

$$\frac{k}{p}(\vec{a}+\vec{b}) = k\left(\frac{1}{p}(\vec{a}+\vec{b})\right) = k\left(\frac{1}{p}\vec{a} + \frac{1}{p}\vec{b}\right) = \frac{k}{p}\vec{a} + \frac{k}{p}\vec{b}.$$

Верно равенство (3) и для иррациональных чисел x. ★

Вопросы для самоконтроля

1. Какими законами связаны действия сложения векторов и умножения вектора на число?
2. Что общего и в чём различия в распределительных законах умножения вектора на число?

ЗАДАЧИ

Работаем с формулой

3.10. Упростите выражение: а) $5(-3\vec{a})$; б) $-2(4\vec{x})$; в) $-3\vec{p} + 2\vec{p}$; г) $4\vec{b} - 2\vec{b}$; д) $2\vec{a} - 2\vec{b}$; е) $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}a\vec{b}$; ж) $(\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{a}-\vec{b})$; з) $0{,}5(2\vec{a} - 4\vec{b}) - 2(3\vec{a} - 2\vec{b})$; и) $\vec{x} - 3\vec{z} - (\vec{z} - \vec{x}) - 2(\vec{y} - 2\vec{z})$.

3.11. Из данного равенства выразите каждый из векторов через другие: а) $2\vec{a} - 5\vec{b} = \vec{0}$; б) $2\vec{a} - 5(\vec{b} - 3\vec{a}) = \vec{0}$; в) $\alpha\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$; г) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$; д) $0{,}5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \vec{0}$.

Планируем

3.12. Отметьте любые три точки A, B, C. Как найти точку X, такую, что: а) $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$; б) $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XC}$; в) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$; д) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XC} = \vec{0}$?

3.13. Отметьте две точки A и B. Как найти точку X, такую, что: а) $\overrightarrow{XA} = 3\overrightarrow{XB}$; б) $\overrightarrow{BX} = -2\overrightarrow{AX}$; в) $\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{XB} = 3\overrightarrow{AB}$?

Находим величину

3.14. а) Точки C и D делят на три равные части отрезок AB (C между A и D), а точка O — любая точка плоскости. Выразите векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. б) Точка C делит отрезок AB в отношении $p:q$, а точка O — любая точка плоскости. Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. в) Выразите вектор, заданный биссектрисой треугольника, через векторы, заданные его сторонами, выходящими из той же вершины.

Доказываем

3.15. а) Точка C — середина отрезка AB, а точка O — любая точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. б) Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а точка O — любая точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

3.16. Докажите, что сумма векторов, идущих из произвольной точки в середины всех сторон треугольника, равна сумме векторов, идущих из этой же точки в его вершины. Можно ли обобщить это утверждение?

§4. Векторная алгебра и векторный метод

4.1. Векторный метод

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называют *линейными операциями* с векторами. Они составляют основу *векторной алгебры* — раздела математики, изучающего действия с векторами. Аппарат векторной алгебры удобен при решении задач геометрии и физики, техники и экономики.

Проиллюстрируем векторный метод для доказательства теоремы о средней линии треугольника. Напомним, что **<u>средней линией треугольника</u>** называется отрезок, соединяющий середины сторон треугольника (рис. 42).

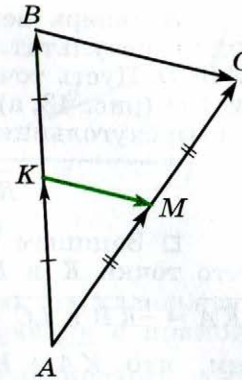


Рис. 42

Теорема (*о средней линии треугольника*). **Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.**

Доказательство. Применяя векторный метод, сначала надо записать в векторной форме условие теоремы (или задачи).

Пусть точка K — середина стороны AB треугольника ABC, точка M — середина стороны AC и KM — средняя линия треугольника ABC (см. рис. 42). Тогда $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Мы записали в векторной форме условие теоремы. Переходим к её доказательству.

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Итак, мы получили векторное равенство $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Осталось его истолковать.

Во-первых, из этого равенства следует, что векторы $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны: *средняя линия треугольника параллельна его стороне.*

Во-вторых, из этого равенства ясно, что *средняя линия KM равна половине стороны BC.* Мы доказали оба утверждения теоремы. ■

Из проведённого доказательства видно, что *решение задач векторным методом* в чём-то аналогично алгебраическому решению текстовых задач и состоит из трёх этапов.

Первый этап. Условие задачи надо записать в векторном виде, вводя подходящим образом векторы (аналогия — введение неизвестных и составление алгебраического уравнения).

Второй этап. Средствами векторной алгебры условие задачи преобразуется так, чтобы получить решение задачи в векторном виде (аналогия — решение алгебраического уравнения).

Третий этап. Полученное векторное соотношение истолковывается в исходных терминах (аналогия — формулировка ответа после того, как алгебраическое уравнение решено).

А теперь векторным методом получим ещё один результат. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Пусть точки K и L — середины сторон AB и CD (рис. 43, а). Отрезок KL — средняя линия четырёхугольника $ABCD$. Докажем, что

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}). \qquad (1)$$

□ Запишем в векторной форме условие того, что точки K и L — середины сторон AB и CD: $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB}$ и $\overrightarrow{LC} = -\overrightarrow{LD}$. Из этих равенств получаем, что $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$. Далее, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL}$ и $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL}$. Сложив два последних равенства, получим $2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, откуда и следует равенство (1). ■

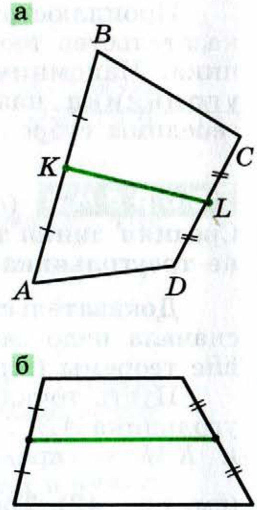


Рис. 43

Опираясь на равенство (1), докажите самостоятельно теорему о средней линии трапеции векторным методом. Напомним, что **средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции (рис. 43, б).

Теорема *(о средней линии трапеции)*. **Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.**

? Вопросы для самоконтроля

1. Какие операции называют линейными операциями с векторами?
2. На какие этапы разбивается решение задачи (или доказательство теоремы) векторным методом?

ЗАДАЧИ

Разбираемся в решении

4.1. Докажите, что на плоскости любой вектор $\vec{v}$ может быть разложен по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представлен в виде $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Решение. Если вектор v коллинеарен вектору $\vec{a}$, то $v = x\vec{a}$, т. е. $y = 0$. Аналогично если вектор $\vec{v}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$, то

$\vec{v} = y\vec{b}$, т. е. $x = 0$. Рассмотрим случай, когда вектор $\vec{v}$ неколлинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$. Отложим эти три вектора от одной точки O: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ (рис. 44). Проведём через точку V прямую, параллельную прямой OB, и обозначим через X точку её пересечения с прямой OA. Затем проведём через точку V прямую, параллельную прямой OA, и обозначим через Y точку её пересечения с прямой OB. Тогда $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$. Так как вектор $\overrightarrow{OX}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, то $\overrightarrow{OX} = x\vec{a}$. Аналогично $\overrightarrow{OY} = y\vec{b}$. Поэтому $\overrightarrow{OV} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е. $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$. ■

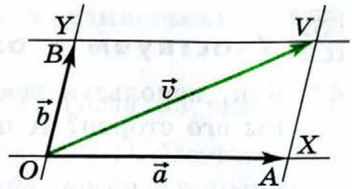


Рис. 44

Рассуждаем

4.2. Как записать на векторном языке, что точки A и B: а) совпадают; б) различны?

4.3. Как записать на векторном языке, что точка X лежит на: а) прямой AB; б) луче AB; в) отрезке AB? А как записать, что точка X не принадлежит этим фигурам?

4.4. Как записать на векторном языке о точке X и отрезке AB: а) X — середина AB; б) X делит AB в отношении $1:2$; в) X делит AB в отношении $p:q$, считая от точки A?

4.5. Как записать на векторном языке, что: а) точки A, B, C являются вершинами треугольника; б) точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма?

4.6. Как записать на векторном языке, что прямые AB и CK: а) совпадают; б) параллельны?

4.7. Как записать на векторном языке об отрезках AB и CK, что: а) $AB = CK$; б) $AB = 2CK$?

Доказываем

4.8. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. Обобщите это утверждение.

Участвуем в олимпиаде

4.9. Как, используя векторы, построить треугольник, зная середины его сторон? А пятиугольник? А четырёхугольник?

▲ 4.2. Об истории теории векторов

Теория векторов необходима для физики. Ещё великий Исаак Ньютон (1643—1727) в своей книге «Математические начала натуральной философии» сразу после формулировки трёх законов (аксиом) механики выводит из них следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1 *При силах совокупных тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как его стороны — при раздельных.* Ясно, что здесь говорится о сложении векторов сил по правилу параллелограмма.

В математике начало теории векторов было положено в середине XIX в. немецким учителем математики одной из гимназий Германом Грассманом (1809—1877) и ирландским математиком и астрономом Уильямом Гамильтоном (1805—1865), которому принадлежит и сам термин *вектор*.

Современное изложение теории векторов было намечено американским физиком Джозайей Гиббсом (1839—1903) в 1881—1884 гг. ▼

§5. Координаты

5.1. Векторы на координатной оси

Сначала рассмотрим векторы, лежащие на некоторой прямой p. Введём на этой прямой координату x, выбрав начало координат — точку O и единичный вектор $\overrightarrow{OE} = \vec{i}$. Прямая p стала координатной осью x (рис. 45). Любой вектор $\vec{a}$, лежащий на прямой p, коллинеарен единичному вектору $\vec{i}$. Согласно характерному свойству коллинеарных векторов (теорема п. 3.1)

$$\vec{a} = a_x \vec{i}. \qquad (1)$$

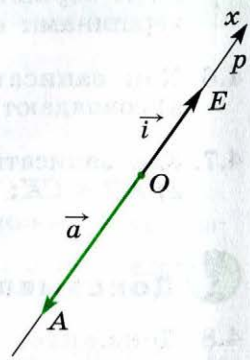


Рис. 45

Число a_x называется **координатой вектора $\vec{a}$ на координатной оси x**. Оно определяется для каждого вектора на оси x единственным образом.

□ Действительно, пусть $\vec{a} = a_x\vec{i}$ и $\vec{a} = a_x^*\vec{i}$. Тогда из равенства $a_x\vec{i} = a_x^*\vec{i}$ следует, что $a_x = a_x^*$ (по свойству 4 п. 3.1). Поэтому *два вектора на оси равны тогда и только тогда, когда их координаты равны.* ■

СВОЙСТВО 1 **При сложении векторов на оси их координаты складываются.**

СВОЙСТВО 2 **При умножении вектора на число его координата умножается на это число.**

Эти свойства докажите самостоятельно.

Свойства 1 и 2 переносят действия с векторами на оси к действиям с их координатами.

Когда вектор $\vec{a}$ отложен на оси x от начала координат (рис. 46), *т. е. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, то его координата a_x равна координате точки A — числу x_A:*

$$a_x = x_A. \tag{2}$$

□ Действительно, модули этих чисел равны длине отрезка OA. Оба эти числа положительны, когда точка A лежит на положительной полуоси x (рис. 46, а), — в этом случае векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Если же точка A лежит на отрицательной полуоси x (рис. 46, б), то оба они отрицательны — векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{i}$ направлены противоположно. Следовательно, числа a_x и x_A равны. ■

Теперь уже легко найти координату вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на оси x, если известны координаты x_A и x_B точек A и B. Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i}$, а $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i}$, то $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i}$. Последнее равенство и говорит о том, что **координата вектора на оси равна разности координат его конца и начала:**

$$\boldsymbol{a_x = x_B - x_A.} \tag{3}$$

Рис. 46

Вопросы для самоконтроля

1. Как вводится координата вектора на оси? Чему равна координата вектора на оси, координаты начала и конца которого известны?
2. Чему равна координата суммы векторов?
3. Что происходит с координатой вектора при умножении его на число?

ЗАДАЧИ

Представляем

5.1. Верно ли, что, чем длиннее вектор, лежащий на оси, тем больше его координата? Верно ли обратное?

Вычисляем

5.2. Вектор $\vec{a}$ имеет координату -5, вектор $\vec{b}$ имеет координату 2. Каковы координаты: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $-\vec{a}+\vec{b}$; в) $2\vec{a}-3\vec{b}$?

5.3. На оси лежат четыре вектора. Их координаты соответственно 3, -2, -8, 7. Какой вектор является их суммой?

5.4. Даны две точки на оси: $A(-10)$ и $B(20)$. Каковы координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$?

5.5. Даны две точки на оси: $A(100)$ и $B(-20)$. Какую координату имеет точка X, такая, что: а) $\overrightarrow{XA}=2\overrightarrow{XB}$; б) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}=\vec{0}$; в) $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XB}=\vec{0}$; г) $2\overrightarrow{AX}-3\overrightarrow{XB}=\vec{0}$?

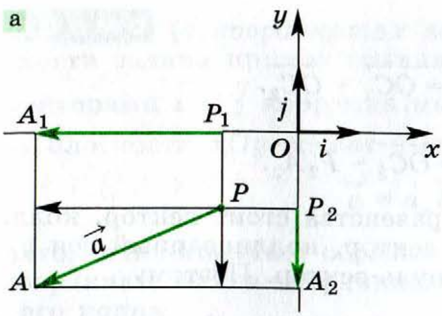
Исследуем

5.6. Даны точки на оси: $A(-3)$, $B(-1)$, $C(4)$ и $D(6)$. Есть ли среди всевозможных векторов, заданных любыми двумя из этих точек, равные?

5.7. Как изменятся координаты векторов на координатной оси, если её единичный вектор изменил направление?

5.2. Векторы на координатной плоскости

Обратимся теперь к векторам, лежащим на координатной плоскости xOy. Единичный вектор оси x обозначим через $\vec{i}$, а координатный вектор оси y через $\vec{j}$. Возьмём произвольный вектор $\vec{a}$.



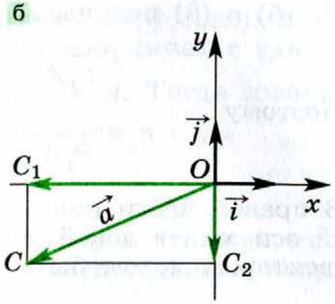


Рис. 47

Если вектор $\vec{a}$ коллинеарен оси x, то $\vec{a} = a_x\vec{i}$. Если вектор $\vec{a}$ коллинеарен оси y, то $\vec{a} = a_y\vec{j}$. Числа a_x и a_y в этих двух частных случаях определяются однозначно.

Рассмотрим общий случай, когда вектор $\vec{a}$ не коллинеарен координатным векторам. Отложим его от некоторой точки P, имеющей координаты (x_P, y_P). Получим вектор $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$.

Пусть точка A имеет координаты (x_A, y_A). Проведём через точки P и A прямые, перпендикулярные осям координат. Они пересекут оси координат в точках $P_1(x_P, 0)$, $A_1(x_A, 0)$, $P_2(0, y_P)$, $A_2(0, y_A)$ (рис. 47, а). Отрезок PA является диагональю прямоугольника, стороны которого лежат на этих прямых, и (согласно правилу параллелограмма)

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{P_2A_2}. \tag{4}$$

Мы разложили вектор $\vec{a}$ по координатным осям:

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{P_2A_2}. \tag{5}$$

Векторы $\overrightarrow{P_1A_1}$ и $\overrightarrow{P_2A_2}$ называются **составляющими вектора** $\vec{a}$ по осям x и y соответственно.

Покажем, что составляющие вектора $\vec{a}$ определяются однозначно, т. е. не зависят от того, от какой именно точки отложен вектор $\vec{a}$.

Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат — точки O. Получим вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$ (рис. 47, б). Разложим его по координатным осям:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем, что

$$\overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{P_2A_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{P_1A_1} - \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{P_2A_2}.$$

В правой части полученного равенства стоит вектор, коллинеарный оси x, а в левой части — вектор, коллинеарный оси y. Таким вектором может быть лишь нуль-вектор. Поэтому

$$\overrightarrow{P_1A_1} - \overrightarrow{OC_1} = \vec{0} \text{ и } \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{P_2A_2} = \vec{0}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{P_1A_1} = \overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{P_2A_2} = \overrightarrow{OC_2}$.

Итак, мы установили единственность разложения вектора на составляющие по осям: составляющие, полученные при откладывании вектора от произвольной точки P, соответственно равны его составляющим $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OC_2}$.

Каждая из этих составляющих имеет свою координату на соответствующей оси. Эти координаты обозначаем a_x и a_y. Поскольку $\overrightarrow{OC_1} = a_x\vec{i}$ и $\overrightarrow{OC_2} = a_y\vec{j}$, то, подставляя эти равенства в формулу (6), получаем представление вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}. \tag{7}$$

В пункте 5.1 показано, что число a_x — это координата точки C_1 на оси x. Аналогично число a_y — координата точки C_2 на оси y. Следовательно, пара чисел $(a_x; a_y)$ — это координаты точки C.

Полученная пара чисел $(a_x; a_y)$ называется **координатами вектора** $\vec{a}$ в заданной системе координат. Она же является координатами точки C — конца вектора $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$.

Последнее утверждение позволяет по каждой упорядоченной паре чисел $(a_x; a_y)$ построить вектор $\vec{a}$, координатами которого в заданной системе прямоугольных координат xOy будут числа a_x, a_y. Для этого достаточно в этой системе координат построить точку C с координатами a_x, a_y и взять вектор $\overrightarrow{OC}$. Его координатами и будут числа a_x, a_y.

Поскольку в заданной системе координат составляющие вектора определяются однозначно, то относительно этой системы и координаты вектора определяются единственным образом.

Проведённые рассуждения подытожим в виде следующей теоремы:

Теорема *(о координатах вектора на плоскости).* **Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат с единичными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ координатных осей x и y. Тогда любой вектор $\vec{a}$ плоскости xOy может быть представлен в виде**

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \tag{8}$$

и притом единственным образом. Если вектор $\vec{a}$ отложен от начала координат, то его координаты равны соответственно координатам его конца.

Ещё раз вернёмся к рисунку 47, б. Из теоремы Пифагора следует, что $OC^2 = OC_1^2 + OC_2^2$. Поскольку $OC = |\vec{a}|$, $OC_1 = |a_x|$ и $OC_2 = |a_y|$, то

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2, \tag{9}$$

т. е. **квадрат модуля вектора равен сумме квадратов его координат.**

Как найти координатное разложение вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если известны координаты начала и конца этого вектора: $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ (рис. 48)?

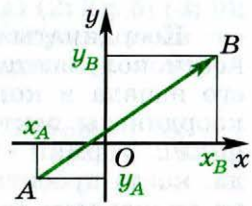


Рис. 48

По определению координаты вектора равны коэффициентам при векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в равенстве (6). Так как

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) =$$
$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j},$$

то координата составляющей на оси x — число $a_x = x_B - x_A$, а координата составляющей на оси y — число $a_y = y_B - y_A$.

Итак, *чтобы найти координаты вектора, нужно от координат конца вектора отнять координаты начала вектора:*

$$a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A. \tag{10}$$

Поскольку каждому вектору на координатной плоскости можно поставить в соответствие упорядоченную пару чисел — его координаты, а каждой упорядоченной паре чисел соответствует вектор, для которого эта пара чисел является его координатами, то появляются основания для того, чтобы отождествить вектор $\vec{a}$ с парой его координат $(a_x; a_y)$ и писать $\vec{a} = (a_x; a_y)$, имея в виду, что $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

Равенства (9) и (10) дают ещё одну формулу для вычисления квадрата модуля вектора $\overrightarrow{AB}$, координаты начала и конца которого известны:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2. \quad (11)$$

Так как модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ — это расстояние между точками A и B, то формула (11) является также *формулой для квадрата расстояния между двумя точками* $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ и может быть записана так:

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2. \quad (12)$$

Если известны координаты концов отрезка AB — $(x_A; y_A)$ и $(x_B; y_B)$, то легко можно найти координаты точки $C(x_C; y_C)$ — середины отрезка AB. Так как в этом случае $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, то $x_C - x_A = x_B - x_C$ и $y_C - y_A = y_B - y_C$, а потому

$$x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \text{ и } y_C = \frac{1}{2}(y_A + y_B). \quad (13)$$

Координаты вектора на координатной плоскости получаются в результате проектирования его начала и конца на оси координат. Поэтому координаты вектора называют также его *проекциями*. Термин «проекция» употребляется и тогда, когда проектирование начала и конца вектора происходит только на одну ось (рис. 49), причём необязательно в системе координат, — так обычно поступают в физике.

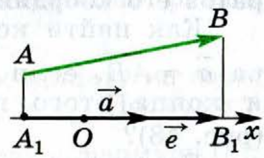


Рис. 49

Вопросы для самоконтроля

1. Как разложить вектор по координатным осям?
2. Что такое координаты вектора в данной системе координат?
3. Как вычислить модуль вектора через его координаты?
4. Как выражаются координаты вектора через координаты его начала и конца?
5. Как найти расстояние между точками, координаты которых известны?
6. Известны координаты трёх вершин параллелограмма. Как найти координаты его четвёртой вершины и координаты точки пересечения диагоналей?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.8. Докажите, что проекция ненулевого вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.

Углом между ненулевым вектором и осью называется угол между этим вектором и единичным вектором оси. Напомним, что *косинус тупого угла равен минус косинус смежного с ним острого угла.*

5.9. Пусть $\vec{a}$ — единичный вектор, а φ_1 и φ_2 — углы, которые он составляет с осями координат. Докажите, что:

а) $\vec{a} = \cos\varphi_1 \vec{i} + \cos\varphi_2 \vec{j}$; б) $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = 1$.

Рисуем

5.10. Нарисуйте систему координат. Нарисуйте такой вектор, что: а) обе его координаты положительны; б) обе его координаты отрицательны; в) одна из координат положительна, а другая отрицательна; г) одна из координат равна нулю.

5.11. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$, координаты которого: а) (2; 2); б) (3; 0); в) (−2; −4); г) (0; −3); д) (3; −2). Нарисуйте векторы с теми же координатами и с началом в точке B, координаты которой (−2; −1).

5.12. Нарисуйте ось. Нарисуйте вектор, проекция которого на эту ось равна: а) 2; б) −2; в) 0.

Вычисляем

5.13. Каковы координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длина, если: а) $A(0; 2)$ и $B(-1; 3)$; б) $A(2; 3)$ и $B(-1; -1)$; в) $A(-2; -3)$ и $B(1; 1)$; г) $A(p; q)$ и $B(-p; -q)$?

5.14. Какой угол образует вектор с осями координат, если его координаты равны: а) (1; 1); б) (1; −1); в) (−1; 1); г) (−1; −1); д) $(1; \sqrt{3})$; е) $(-\sqrt{3}; -1)$; ж) (2; 3)?

5.15. От точки $A(2; -3)$ отложили вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Каковы координаты точки B, если: а) $\vec{a} = (1; 2)$; б) $\vec{a} = (-1; 2)$; в) $\vec{a} = (1; -2)$; г) $\vec{a} = (10; -5)$; д) $\vec{a} = (-3; -1)$?

5.16. От точки A отложили вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Известно, что точка B имеет координаты (2; 3). Каковы координаты точки A, если: а) $\vec{a} = (1; 2)$; б) $\vec{a} = (-1; 2)$; в) $\vec{a} = (1; -2)$; г) $\vec{a} = (10; -5)$; д) $\vec{a} = (-3; -1)$?

Ищем границы

5.17. Длина вектора равна 5. Одна из его координат возрастает от 2 до 4. Как изменяется другая его координата?

5.18. Одна из координат вектора изменяется от 1 до 2, а другая — от −3 до 1. В каких границах лежит длина вектора?

Исследуем

5.19. Может ли одна из координат вектора равняться его длине? А обе координаты?

5.3. Действия с векторами в координатной форме

Как и координата вектора на прямой, координаты вектора на плоскости обладают следующими свойствами:

СВОЙСТВО 1 **При сложении векторов их соответствующие координаты складываются.**

□ Пусть $\vec{a} = (a_x; a_y)$, $\vec{b} = (b_x; b_y)$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Покажем, что

$$\vec{c} = (a_x + b_x; a_y + b_y),$$

т. е.

$$c_x = a_x + b_x \text{ и } c_y = a_y + b_y. \tag{14}$$

Действительно,

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}. \tag{15}$$

Из равенства (15) и единственности координатного представления вектора вытекают равенства (14). ■

СВОЙСТВО 2 **При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.**

□ Пусть $\vec{a} = (a_x; a_y)$ и $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Покажем, что $\vec{b} = (\alpha a_x; \alpha a_y)$, т. е.

$$b_x = \alpha a_x \text{ и } b_y = \alpha a_y. \tag{16}$$

Действительно, $\vec{b} = \alpha a_x\vec{i} + \alpha a_y\vec{j}$, т. е. выполняются равенства (16). ■

Свойство 2 позволяет по-другому сформулировать характерное свойство коллинеарности векторов (теорему пункта 3.1): *два вектора $\vec{a} = (a_x; a_y)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т. е. выполняются равенства* (16).

Это утверждение докажите самостоятельно.

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равны координаты суммы векторов, если координаты слагаемых известны?
2. Что происходит с координатами вектора при умножении его на число?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.20. Дан вектор $\vec{a} = (x; y)$. Каковы координаты вектора $-\vec{a}$?

5.21. Каковы координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$? Дайте словесную формулировку этому свойству координат. Каковы координаты вектора $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$?

Вычисляем

5.22. Дан вектор $\vec{a} = (2; -1)$. Запишите координаты вектора: а) $-\vec{a}$; б) $2\vec{a}$; в) $-3\vec{a}$.

5.23. Даны векторы $\vec{a} = (-2; 2)$ и $\vec{b} = (2; -2)$. Найдите координаты вектора: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $-\vec{a} - \vec{b}$; г) $-\vec{a} + \vec{b}$; д) $2\vec{a} - 3\vec{b}$; е) $\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$.

5.24. Пусть вектор $\vec{a}$ длиной 2 образует с осью x угол 30° и тупой угол с осью y, а вектор $\vec{b}$ длиной 4 образует с осью x угол 120° и острый угол с осью y. Каковы координаты векторов: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{a} + \vec{b}$; в) $\vec{a} - 2\vec{b}$?

5.25. Коллинеарны ли векторы: а) (4; −2) и (2; 1); б) (4; −2) и (−2; 1); в) (4; −2) и (4; 0); г) (−4; 2) и (2; −1); д) (3; 0) и (−5; 0); е) (3; 0) и (0; 3)?

5.26. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Найдите их недостающие координаты: а) $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (...; 3)$; б) $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (4; ...)$; в) $\vec{a} = (0; 3)$, $\vec{b} = (...; y)$; г) $\vec{a} = (1; 0)$, $\vec{b} = (x; ...)$.

5.27. Заданы точки $A(2; -3)$, $B(-1; -1)$, $C(4; -2)$, $P(3; 3)$. Вычислите координаты вектора: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$; в) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$.

5.4. Метод координат. Уравнения окружности и прямой

Координаты в геометрию ввели в середине XVII в. французские математики Рене Декарт (1596—1650) и Пьер Ферма (1601—1665). Ими был создан новый раздел геометрии — **аналитическая геометрия**, в которой геометрические фигуры на координатной плоскости или в пространстве, где введены координаты, задаются алгебраическими уравнениями и геометрические задачи решаются алгебраическими методами. В честь Р. Декарта прямоугольные системы координат называют также *декартовыми координатами*.

Говорят, что *некоторое алгебраическое уравнение задаёт фигуру F на координатной плоскости, если точка принадлежит этой фигуре тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному уравнению.*

Проиллюстрируем это положение, выведя уравнение окружности F с центром в точке A и радиусом R.

□ Введём на плоскости декартовы координаты x; y. Пусть точка A имеет координаты $(a;\ b)$ (рис. 50). Точка $M(x;\ y)$ принадлежит окружности F тогда и только тогда, когда $AM = R$, или, что равносильно, тогда и только тогда, когда $AM^2 = R^2$. Если записать последнее равенство через координаты точек A и M (см. (12) в п. 5.2), то получим уравнение окружности F:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (17)$$

В частном случае, когда центр окружности находится в начале координат, уравнение (17) упрощается:

$$x^2 + y^2 = R^2. \ ■ \qquad (18)$$

Ещё один пример задания фигуры уравнением. Покажем, что *прямая на координатной плоскости задаётся линейным уравнением*, т. е. уравнением вида

$$ax + by + c = 0, \qquad (19)$$

Р. Декарт

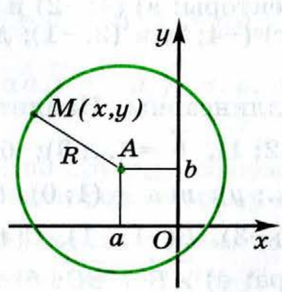


Рис. 50

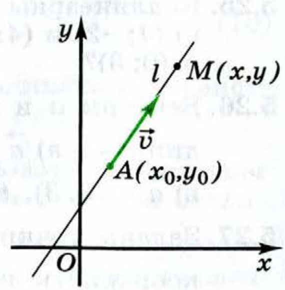


Рис. 51

при условии, что пара чисел $(a; b)$ — ненулевая, т. е. хотя бы одно число из этой пары отлично от нуля.

Так как мы уже познакомились с векторами и с их координатами, то, решая эту задачу, будем сочетать метод координат с векторным методом, обычную алгебру и векторную алгебру.

□ Положение прямой l на координатной плоскости $(x; y)$ определится, если задать некоторую точку $A(x_0; y_0)$ этой прямой и ненулевой вектор $\vec{v} = (p, q)$, лежащий на прямой l (его называют **направляющим вектором прямой**, рис. 51). Точка $M(x; y)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{AM} = (x - x_0; y - y_0)$ коллинеарен вектору $\vec{v} = (p; q)$.

А условие коллинеарности векторов — это пропорциональность их координат. Если обе координаты вектора $\vec{v}$ отличны от нуля, то эта пропорциональность записывается так:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \qquad (20)$$

Уравнение (20) и есть уравнение прямой l.

Упростив его, получим $qx - py + (py_0 - qx_0) = 0$, т. е. уравнение вида (19).

Если же $p = 0$, то прямая l задаётся уравнением $x - x_0 = 0$, а если $q = 0$, то она задаётся уравнением $y - y_0 = 0$, т. е. в этих частных случаях снова имеем уравнения вида (19). ■

В заключение отметим, что построение графиков функций — это тоже одно из применений метода координат. Вспомните, что график линейной функции — это прямая, а график квадратичной функции — парабола.

Вопросы для самоконтроля

1. Что значит выражение *некоторое уравнение задаёт фигуру на координатной плоскости*?
2. Как бы вы сформулировали ответ на вопрос: что значит выражение *некоторое неравенство задаёт фигуру на координатной плоскости*? Приведите примеры.
3. Как бы вы сформулировали ответ на вопрос: что значит выражение *некоторая система уравнений задаёт фигуру на координатной плоскости*? Приведите примеры.
4. Каким уравнением задаётся окружность?
5. Каким уравнением задаётся прямая? Где вы ранее встречались с уравнением прямой?
6. Каким бы неравенством вы задали круг?

ЗАДАЧИ

Рисуем

5.28. Нарисуйте фигуру, заданную на координатной плоскости xOy уравнением: а) $x = 2$; б) $y = -2$; в) $x(x - 2) = 0$; г) $y(y + 2) = 0$; д) $x^2 - y^2 = 0$; е) $|x| = 1$; ж) $|y| = x^2$; з) $|x| + |y| = 1$; и) $|x| = |y|$.

5.29. Нарисуйте фигуру, заданную на координатной плоскости xOy неравенством: а) $x \geq 2$; б) $y \leq -2$; в) $x(x - 2) \geq 0$; г) $y(y + 2) \leq 0$; д) $x^2 + y^2 \leq a^2$; е) $|x| \geq 1$; ж) $|y| \leq x^2$; з) $|x| + |y| \leq 1$; и) $|x| \geq |y|$.

Исследуем

5.30. Напишите уравнение множества точек на координатной плоскости, равноудалённых: а) от точек $A(2;\ 0)$ и $B(0;\ -3)$; б) от точек $A(-3;\ 0)$ и $B(4;\ 1)$.

5.31. По какой траектории движется в системе координат точка K, если она равноудалена: а) от точки $A(2;\ 0)$ и оси y; б) от точки $A(0;\ -3)$ и оси x; в) от точки $A(2;\ 3)$ и прямой $x = 1$; г) от точки $A(-1;\ 2)$ и прямой $y = 4$? Напишите уравнение этой траектории. Какая у вас появилась гипотеза после решения этой задачи?

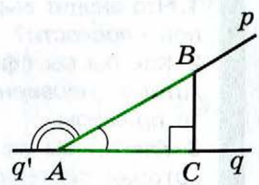
5.32. Напишите уравнение множества точек K на координатной плоскости, если $KA = 2KB$ и точки A и B таковы: а) $A(1;\ 0)$ и $B(-5;\ 0)$; б) $A(0;\ 2)$ и $B(0;\ -6)$; в) $A(2;\ 2)$ и $B(-6;\ -6)$?

5.33. Напишите уравнение множества точек K на координатной плоскости таких, что $KA^2 - KB^2 = 1$, а точки A и B таковы: а) $A(2;\ 0)$ и $B(-3;\ 0)$; б) $A(0;\ 4)$ и $B(0;\ -6)$.

§6. Скалярное умножение векторов

6.1. Косинус

В определении скалярного произведения векторов содержится косинус угла между векторами. Поэтому мы сначала повторим основные сведения о косинусе угла. Начнём с определения косинуса угла.



$$\cos(\angle pq) = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos(\angle pq') = -\frac{AC}{AB}$$

Рис. 52

Определение. Пусть на одной стороне угла A отложен отрезок AB и AC — его проекция на прямую, содержащую другую сторону угла A (рис. 52). Тогда **косинусом угла** A называется отношение отрезков AC и AB, взятое со знаком «плюс», если угол A острый, и со знаком «минус», если угол A тупой или развёрнутый.

Итак, для острого угла A

$$\cos A = \frac{AC}{AB}. \qquad (1)$$

Для тупого угла A

$$\cos A = -\frac{AC}{AB}. \qquad (2)$$

Косинус прямого угла равен нулю (точки A и C совпали, и длина AC равна нулю).

Наконец, из данного определения ясно, что **косинус развёрнутого угла равен −1**.

Из определения косинуса следует также, что *косинусы смежных углов отличаются лишь знаком, т. е. противоположны* (см. рис. 52).

Напомним ещё, что синус угла A определяется так: $\sin A = \frac{BC}{AB}$. Поскольку (по теореме Пифагора) $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то синус и косинус любого угла A связаны важным равенством:

$$\mathbf{\sin^2 A + \cos^2 A = 1.} \qquad (3)$$

Его называют **основным тригонометрическим тождеством**.

Когда величина угла возрастает от 0° до 180°, косинус его убывает от 1 до −1. Это свойство косинуса хорошо иллюстрируется на тригонометрическом круге — единичном круге с центром в начале координат на координатной плоскости x, y (рис. 53).

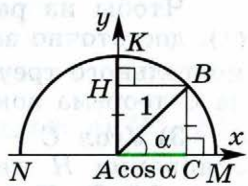


Рис. 53

Зная косинус угла, по таблицам или с помощью калькулятора можно найти градусную меру угла.

Из определения косинуса следует, что *косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, прилежащего к этому углу, и гипотенузы.*

Короче: *косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.*

Если известны две стороны и угол между ними некоторого треугольника, то через эти его элементы можно выразить все остальные его элементы, в том числе можно найти его третью сторону. О том, как это сделать для прямоугольного треугольника, говорит теорема Пифагора. А для произвольного треугольника это позволяет сделать *теорема косинусов*, частным случаем которой является теорема Пифагора. Докажем её.

Теорема (*теорема косинусов*). **Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.**

Дано: $\triangle ABC$.

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. (4)

Доказательство. Для угла C есть три случая.

1) Угол C — прямой. Тогда $\cos C = 0$, и равенство (4) становится теоремой Пифагора.

2) Угол C — острый. В треугольнике ABC, кроме угла C, есть ещё хотя бы один острый угол. Допустим, что это угол B (рис. 54, а). Из вершины A проведём высоту AH на сторону BC. Точка H лежит внутри стороны BC и разбивает её на два отрезка $CH = b_1$ и $BH = a - b_1$.

Вычислим по теореме Пифагора квадрат высоты AH из двух прямоугольных треугольников ABH и ACH и приравняем эти выражения. Получим

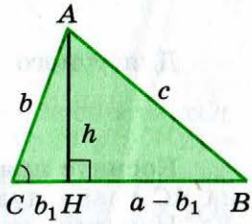
$$c^2 - (a - b_1)^2 = b^2 - b_1^2. \quad (5)$$

Выразим из равенства (5) c^2:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab_1. \quad (6)$$

Чтобы из равенства (6) получить равенство (4), достаточно заметить, что $b_1 = b\cos C$ (из прямоугольного треугольника ACH). Для острого угла C теорема доказана.

а



б

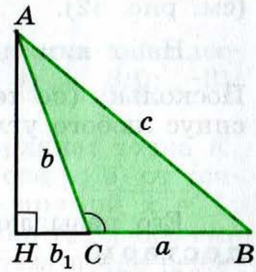


Рис. 54

3) Угол C — тупой. Снова проведём высоту AH. Теперь её основание H лежит на продолжении стороны BC за точку C (рис. 54, б). Доказательство для этого случая проведите самостоятельно. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычислить косинус: а) острого угла; б) тупого угла?
2. Чему равен: а) косинус прямого угла; б) косинус развёрнутого угла?
3. Какова связь между косинусами смежных углов?
4. Какое тождество называется основным тригонометрическим тождеством?
5. Частным случаем какой теоремы является основное тригонометрическое тождество?
6. Чему равен косинус острого угла прямоугольного треугольника?
7. Как изменяется косинус угла при возрастании угла от 0° до 180°?

ЗАДАЧИ

Смотрим

6.1. Запишите выражения для косинусов углов, обозначенных цифрами на рисунке 55.

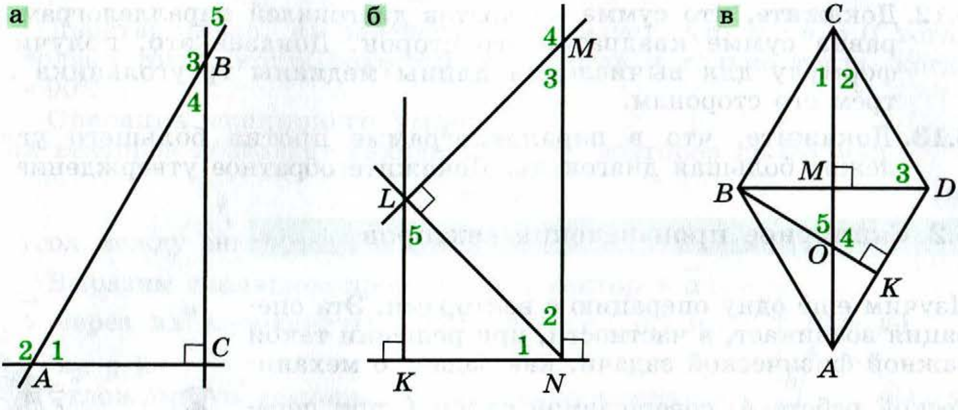


Рис. 55

Рассуждаем

6.2. Расположите в порядке убывания косинусы углов: а) 71°, 28°, 54°; б) 21°, 121°, 54°; в) 153°, 46°, 94°.

6.3. Какие следствия можно получить из равенства: а) $\cos\alpha = \cos\beta$; б) $\cos\alpha = -\cos\beta$?

Вычисляем

6.4. Найдите косинусы следующих углов: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°.

6.5. Найдите величины углов, косинусы которых равны: а) 0,5; б) −0,5; в) 0,3; г) −0,7; д) −1; е) 0; ж) 1.

6.6. Вычислите синусы углов, косинусы которых равны: а) 0,3; б) $\frac{1}{4}$; в) −0,5.

6.7. Вычислите косинусы углов, синусы которых равны: а) 0,25; б) 0,1; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.8. Определите вид треугольника, имеющего такие стороны: а) 5, 6, 7; б) 5, 6, 8; в) 6, 6, 7; г) 6, 6, 9; д) 9, 40, 41.

6.9. Найдите углы треугольников, рассмотренных в задаче 6.8.

Доказываем

6.10. Докажите, что сумма косинусов двух углов любого треугольника положительна.

6.11. Докажите, что сумма косинусов двух острых углов прямоугольного треугольника больше единицы.

6.12. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Доказав это, получите формулу для вычисления длины медианы треугольника по трём его сторонам.

6.13. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит бо́льшая диагональ. Докажите обратное утверждение.

6.2. Скалярное произведение векторов

Изучим ещё одну операцию с векторами. Эта операция возникает, в частности, при решении такой важной физической задачи, как задача о механической работе A, совершаемой силой $\vec{f}$ при перемещении $\vec{s}$ некоторого тела (рис. 56, а).

Известно, что работа A вычисляется по формуле

$$A = |\vec{f}||\vec{s}|\cos\varphi, \qquad (7)$$

где φ — угол между векторами $\vec{f}$ и $\vec{s}$. Число $|\vec{f}||\vec{s}|\cos\varphi$ называется скалярным произведением этих векторов. Итак,

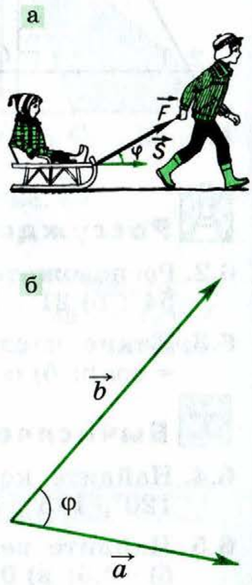


Рис. 56

Определение. ***Скалярным произведением двух ненулевых векторов*** называется произведение их модулей и косинуса угла между ними (рис. 56, б).

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обычно обозначают $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Таким образом, по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \qquad (8)$$

где $\varphi = \angle\vec{a}\,\vec{b}$.

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то полагают:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Отметим два важных частных случая.

1) $\vec{a} = \vec{b}$. Если вектор $\vec{a}$ ненулевой, то угол $\varphi = 0°$, $\cos\varphi = 1$ и из равенства (7) следует, что $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ обозначается $\vec{a}^2$ и называется **скалярным квадратом вектора** $\vec{a}$. Итак, $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

2) Для ненулевых векторов их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

Действительно, из равенства (8) следует, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\cos\varphi = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда $\varphi = 90°$.

Операция скалярного умножения векторов позволяет находить длины векторов по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} \tag{9}$$

и угол между векторами, выражая $\cos\varphi$ из равенства (8).

Выразим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через их координаты. Пусть $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$.

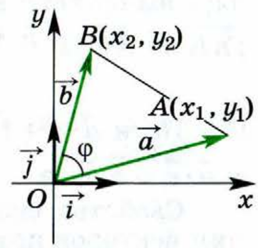


Рис. 57

Отложим эти векторы от начала координат: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то получим треугольник OAB, угол φ которого при вершине O равен углу между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 57).

По теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\varphi. \tag{10}$$

Произведение $OA \cdot OB\cos\varphi = \vec{a} \cdot \vec{b}$. Выразим $\vec{a} \cdot \vec{b}$ из равенства (10). Получим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2). \tag{11}$$

Согласно формуле (12) из п. 5.2 для расстояния между точками имеем

$$OA^2 = x_1^2 + y_1^2,\ OB^2 = x_2^2 + y_2^2,$$
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \tag{12}$$

Подставив равенства (12) в формулу (11), получим выражение скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через их координаты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \tag{13}$$

Проверьте самостоятельно, что для коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. в случае, когда $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, формула (13) тоже справедлива.

А это означает, что:

скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноимённых координат этих векторов.

Из формулы (13) вытекают такие *свойства скалярного умножения*:

СВОЙСТВО 1 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

СВОЙСТВО 2 $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа α.

СВОЙСТВО 3 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

□ Проверим, например, свойство 3.

Положим $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3)$. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

$$\text{и } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 = x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3.$$

Но и $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = x_1x_3 + y_1y_3 + x_2x_3 + y_2y_3$. Поэтому $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$. ■

Свойства скалярного умножения вместе со свойствами сложения векторов позволяют скалярно умножать суммы и разности векторов по правилам обычной алгебры. Например:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

? Вопросы для самоконтроля

1. Что называется скалярным произведением двух ненулевых векторов?
2. Когда скалярное произведение равно нулю?
3. Как выражается скалярное произведение векторов через их координаты?
4. В какой теореме о треугольнике присутствует скалярное произведение?
5. Как зависит знак скалярного произведения от угла между векторами?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

6.14. Докажите, что проекция вектора на ось равна скалярному произведению этого вектора и единичного вектора оси.

6.15. Докажите, что: а) $\vec{a} \cdot (x\vec{b}) = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$; б) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Работаем с формулой

6.16. Упростите: а) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$; б) $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2$.

6.17. Преобразуйте: а) $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; б) $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$; в) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$; г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$.

Вычисляем

6.18. Вычислите скалярное произведение двух векторов, если их модули равны 3 и 4, а угол между ними равен: а) 30°; б) 150°; в) 45°; г) 60°; д) 90°; е) 120°; ж) 135°.

6.19. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 2. Вычислите скалярные произведения векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

6.20. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 2. Точка K — середина его стороны BC. Вычислите скалярные произведения векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AK}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AK}$; д) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AK}$.

6.21. Вычислите угол между векторами: а) (1; −3) и (2; 6); б) (−2; 2) и (3; 0); в) (3; 4) и (4; 3); г) (2; −3) и (3; 2); д) (1; 1) и (2; 3).

Доказываем

6.22. Используя скалярное умножение, докажите, что: а) диагонали ромба взаимно перпендикулярны; б) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

Планируем

I.1. На координатной плоскости известны координаты двух вершин равностороннего треугольника. Как найти координату его третьей вершины?

I.2. На координатной плоскости известны координаты четырёх точек. Как проверить, будут ли они вершинами: а) ромба; б) прямоугольника; в) квадрата; г) равнобокой трапеции? Как узнать, лежат ли они на одной окружности?

I.3. Известны координаты середин сторон треугольника. Как найти координаты его вершин?

Доказываем

I.4. Пусть точки A, B, C, D — вершины замкнутой ломаной $ABCDA$, а точки K, L, M, N — середины отрезков AB, BC, CD, DA.

а) Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. б) Докажите, что эта же точка является серединой отрезка, соединяющего середины отрезков AC и BD.

I.5. а) Выражение $ab + cd$ истолкуйте как скалярное произведение двух векторов. б) Пусть при этом $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$. Что означают эти равенства для рассмотренных векторов? в) Докажите, используя полученное векторное истолкование, что

$$|ab + cd| \leq \sqrt{a^2 + c^2}\ \sqrt{b^2 + d^2}.$$

Исследуем

I.6. Пусть точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Проверьте, что выполнение равенства $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ для любой точки O является характерным свойством параллелограмма $ABCD$.

I.7. Концы отрезка длины a скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. По какой линии движется его середина?

I.8. На координатной плоскости найдите множество точек, таких, что: а) сумма расстояний от них до координатных осей равна сумме величин, обратных этим расстояниям; б) модуль разности расстояний от них до координатных осей равен модулю разности величин, обратных этим расстояниям.

I.9. Пусть A и B — две данные точки. Какой фигурой является множество точек M, таких, что:

а) $MA^2 - MB^2 = c$; б) $MA^2 + k^2MB^2 = c$?

Применяем компьютер

Решая задачи этой рубрики с помощью компьютера, используйте, например, среду «Живая математика», которую можно найти по адресу: http://www.uchportal.ru/load/24-1-0-2276.

I.10. Пусть O — произвольная точка плоскости и AB — отрезок на этой плоскости. Пусть точка C — середина отрезка AB. Докажите и проверьте с помощью компьютерного эксперимента, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Указание. В задачах этой рубрики рекомендуется использование команды «Параллельный перенос».

I.11. В треугольнике ABC проведены три медианы: AA_1, BB_1, CC_1. Пусть T — точка их пересечения. Докажите и проверьте с помощью компьютерного эксперимента, что $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.

I.12. В треугольнике ABC проведены три хорды: AA_1, BB_1, CC_1. При этом $BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = AC_1 : C_1B = 1 : 2$. Докажите и проверьте с помощью компьютерного эксперимента, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

Глава II

Преобразования

В этой главе изучаются важнейшие преобразования геометрических фигур.

С реальными преобразованиями предметов мы имеем дело постоянно: изображая пространственные фигуры, мы преобразуем эти фигуры в плоские (рис. 58); при освещении различных предметов возникают их тени (рис. 59); глядя в зеркало, мы видим образы отражённых в нём предметов (рис. 60). Когда строят здания, электростанции, корабли и т. п., то сначала делают их уменьшенные модели, а затем эти модели преобразуют в сами эти объекты.

Теория геометрических преобразований возникла в связи с познанием законов изображения предметов на плоскости — с теории перспективы. Перспективе были посвящены труды знаменитых художников эпохи Возрождения — Леонардо да Винчи (1452—1519) и Альбрехта Дюрера (1471—1528). Хорошее представление о перспективе дают видовые фотографии больших пространств, например, фотография площади в Ватикане на рис. 126 в центре.

Современная геометрия — это во многом наука о преобразованиях фигур. В этом одно из её отличий от классической геометрии, которая изучала лишь неподвижные фигуры, а не их изменения.

§7. Основные понятия

7.1. Понятие преобразования

Понятие геометрического преобразования очень похоже на понятие *числовой функции*. Напомним известное вам из курса алгебры определение функции:

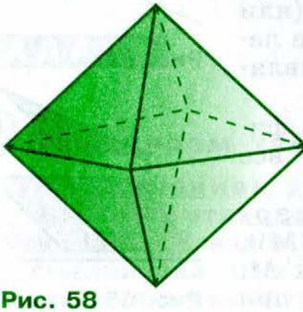


Рис. 58

Рис. 59

Рис. 60

Если каждому числу x из некоторого множества чисел M поставлено в соответствие определённое число, обозначаемое $f(x)$, то говорят, что на множестве M задана **функция f**.

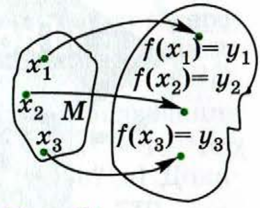


Рис. 61

А теперь сформулируем определение *преобразования фигуры*.

Если каждой точке X некоторой фигуры M поставлена в соответствие определённая точка, обозначаемая $f(X)$, то говорят, что задано **преобразование f фигуры M** (рис. 61).

Сравнив эти два определения, видим их полную аналогию. Но в определении функции речь идёт о *сопоставлении числам x* из множества M *чисел $f(x)$*, а в определении преобразования говорится о *сопоставлении точкам X* фигуры M *точек $f(X)$*. Число $f(x)$ называется значением функции f для аргумента x, а точка $f(X)$ называется **образом точки X при преобразовании f**.

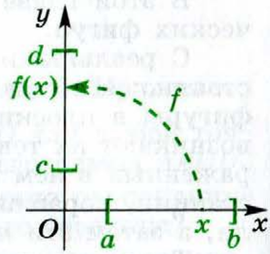


Рис. 62

Можно даже сказать, что преобразование фигуры — это задание на ней функции, аргументами и значениями которой являются точки. С другой стороны, задав функцию $f(x)$ на некотором числовом множестве, например на отрезке $[a; b]$ (рис. 62), мы можем также считать, что задали преобразование отрезка $[a; b]$. В этом случае график функции $f(x)$ помогает нам определить положение образа любой точки этого отрезка (рис. 63).

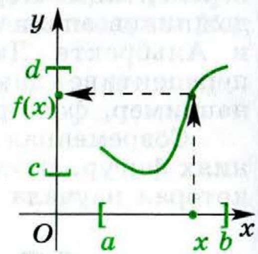


Рис. 63

Примером преобразования фигуры является проектирование её на прямую (рис. 64) или на плоскость (рис. 65). Вспомните, что проектирование фигуры M на прямую (на плоскость) состоит в том, что каждой точке X фигуры M сопоставляется её проекция X' на эту прямую (на эту плоскость).

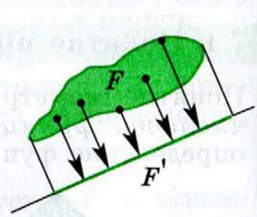


Рис. 64

Точка X называется **неподвижной точкой** преобразования f, если $f(X) = X$. Например, при проектировании фигуры M на прямую (или на плоскость) те точки этой фигуры, которые лежат на этой прямой (на этой плоскости), являются неподвижными точками.

Тождественным преобразованием фигуры называется такое её преобразование, все точки которого неподвижны.

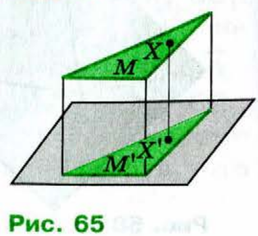


Рис. 65

Образом фигуры M при преобразовании f называется фигура (её обозначают $f(M)$), состоящая из образов всех точек X фигуры M. Например, образ наклонной AC к прямой a при проектировании отрезка AC на прямую a — это его проекция AB на прямую a (рис. 66).

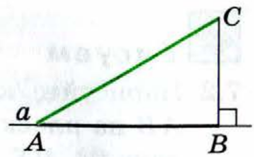


Рис. 66

А образом прямой p, перпендикулярной плоскости α, при проектировании на α является точка O, в которой пересекаются p и α (рис. 67). И вообще образ некоторой фигуры M при проектировании на прямую или на плоскость — это её проекция M' на эту прямую или на плоскость (см. рис. 64, 65). А для числовой функции $f(x)$, график которой изображён на рисунке 63, образом отрезка $[a; b]$ является множество её значений — отрезок $[c; d]$.

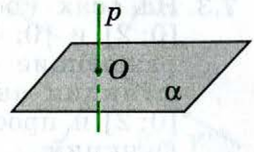


Рис. 67

Свойства образов важнейших фигур при различных преобразованиях мы и будем изучать в этой главе.

Если точка Y является образом точки X при преобразовании f, то **точку X называют прообразом точки Y**.

Обратим ваше внимание на то, что важнейшие в теории преобразований слова *образ* и *прообраз* имеют в этой теории тот же смысл, что и в литературе. Образы многих литературных героев имеют своими прообразами конкретных исторических лиц. Например, Волк в басне И. А. Крылова «Волк на псарне» имеет своим прообразом Наполеона. Приведите ещ` аналогичные примеры.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры преобразований реальных фигур.
2. В чём заключается преобразование фигуры?
3. Что называют образом точки при некотором преобразовании?
4. Что называют образом фигуры при некотором преобразовании?
5. Что такое неподвижная точка преобразования?
6. Какое преобразование называют тождественным?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

7.1. **Объединением** двух фигур называется фигура, состоящая из всех точек этих фигур. Объединение фигур M и P обозначается $M \cup P$. Докажите, что при всяком преобразовании образом объединения двух фигур является объединение образов этих фигур при рассматриваемом преобразовании.

Рисуем

7.2. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте проекцию: а) ребра AB на плоскость CDD_1; б) ребра BC на плоскость AB_1C_1; в) диагонали AC_1 на плоскость ABC; г) вершины B на плоскость AB_1C; д) треугольника ABB_1 на плоскость AB_1C.

Представляем

7.3. На осях координат Ox и Oy заданы соответственно отрезки $[0; 2]$ и $[0; 4]$. а) Представьте две различные функции, отображающие отрезок $[0; 2]$ на отрезок $[0; 4]$. б) Задайте эти функции аналитически. в) Найдите образ середины отрезка $[0; 2]$ и прообраз середины отрезка $[0; 4]$ для каждой из этих функций.

Вычисляем

7.4. Задана функция: а) $y = 3x - 5$; б) $y = x^2$; в) $y = \frac{2}{x}$. Найдите образ отрезка $[1; 2]$ и прообраз отрезка $[1; 4]$ при каждом из этих преобразований. Найдите их неподвижные точки.

Исследуем

7.5. На плоскости фиксирована точка O и задано преобразование f, которое точке O ставит в соответствие точку O, а каждой точке X, отличной от точки O, середину отрезка OX. Чем является при таком преобразовании образ: а) отрезка; б) треугольника; в) прямой; г) окружности; д) круга? Сделайте рисунки для различных случаев расположения перечисленных фигур и точки O.

7.6. На координатной плоскости каждой точке $M(x; y)$ ставится в соответствие точка $M'(x; 2y)$. Нарисуйте для этого преобразования образ какого-нибудь: а) отрезка; б) треугольника; в) параллелограмма; г) квадрата; д) трапеции. Сделайте рисунки для различных случаев расположения этих фигур относительно осей координат. Какими фигурами являются образы перечисленных фигур для данного преобразования? Имеет ли оно неподвижные точки?

7.2. Важные примеры преобразований

Те преобразования, которые рассматриваются в этом пункте, позволят нам далее в этой главе описать преобразования, сохраняющие расстояния между точками, — движения, а также преобразования, сохраняющие форму фигур, — подобия. Перейдём к примерам.

1. *Центральная симметрия.* Зафиксируем некоторую точку O. **Центральной симметрией с центром O** называется преобразование фигуры, которое каждой её точке X сопоставляет точку X', симметричную ей относительно точки O (рис. 68).

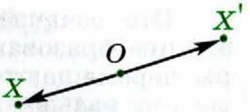


Рис. 68

Это преобразование мы обозначим S_O. Центральную симметрию удобно задать так: для произвольной точки X и её образа X' при центральной симметрии выполняется равенство

$$\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}. \qquad (1)$$

Из этого равенства следует, что если точки X и O различные, то точка O является серединой отрезка XX'.

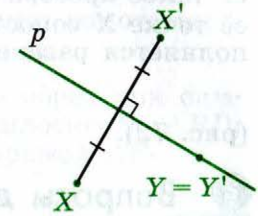


Рис. 69

Отметим также, что если $X = O$, то $X' = O$, т. е. O — неподвижная точка центральной симметрии S_O (единственная).

2. *Осевая симметрия.* Зафиксируем некоторую прямую p. **Осевой симметрией с осью p** называется преобразование фигуры, которое каждой её точке X сопоставляет точку X', симметричную ей относительно прямой p (рис. 69). Это преобразование мы обозначим S_p.

Напомним, что для произвольной точки X и её образа $X' = S_p(X)$ прямая p является серединным перпендикуляром отрезка XX', когда точка X не лежит на прямой p. Если же точка X лежит на прямой p, то её образом при симметрии относительно этой прямой является она сама. Поэтому все точки прямой p являются неподвижными точками осевой симметрии S_p.

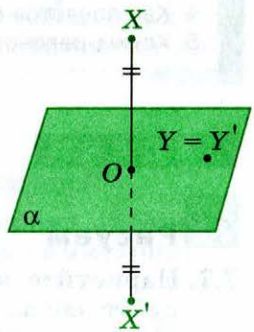


Рис. 70

3. *Зеркальная симметрия.* Зафиксируем некоторую плоскость α. **Симметрией относительно плоскости α** называется преобразование фигуры, которое каждой её точке X сопоставляет точку X', симметричную ей относительно этой плоскости (рис. 70).

Такое преобразование мы обозначим S_α. Неподвижные точки зеркальной симметрии S_α — это точки плоскости α.

4. *Параллельный перенос.* **Параллельным переносом** (или, короче, **переносом**) **фигуры** называется такое преобразование фигуры, при котором все её точки перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние (рис. 71).

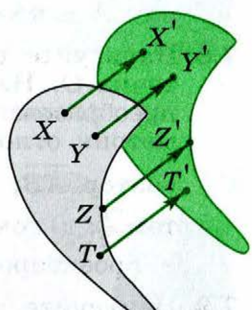


Рис. 71

Это означает, что параллельный перенос — это преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются на один и тот же вектор. Этот вектор называют **вектором переноса**. Перенос на вектор $\vec{a}$ мы обозначаем T_a.

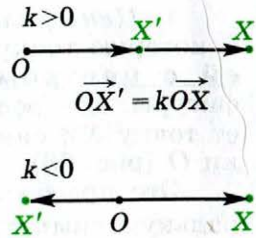


Рис. 72

5. *Гомотетия.* **Гомотетией с центром O и ненулевым коэффициентом k** называется такое преобразование фигуры, которое каждой её точке X сопоставляет такую точку X', что выполняется равенство

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX} \qquad (2)$$

(рис. 72).

Вопросы для самоконтроля

1. Как задаётся центральная симметрия? Как её обозначают?
2. Как задаётся осевая симметрия? Как её обозначают?
3. Как задаётся зеркальная симметрия? Как её обозначают?
4. Как задаётся параллельный перенос? Как его обозначают?
5. Каким равенством задаётся гомотетия?

ЗАДАЧИ

Рисуем

7.7. Нарисуйте квадрат $ABCD$, центр которого — точка O. Нарисуйте образ этого квадрата при следующих преобразованиях: а) симметрии относительно точки A; б) симметрии относительно прямой AB; в) параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OA}$; г) гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{1}{2}$; д) гомотетии с центром A и коэффициентом (-2).

7.8. Нарисуйте правильный треугольник ABC, центр которого — точка O. Нарисуйте образ этого треугольника при следующих преобразованиях: а) симметрии относительно точки A; б) симметрии относительно прямой BC; в) параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$; г) гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $\frac{1}{2}$; д) гомотетии с центром в точке B и коэффициентом (-2); е) проектировании на прямую AO в направлении прямой BO.

7.9. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть O — центр куба, p — прямая, проходящая через центры граней AA_1B_1B и CC_1D_1D.

Нарисуйте: а) $S_O(AO)$; б) $S_O(CC_1)$; в) $S_p(BB_1)$; г) $S_p(BC)$; д) $S_p(AC_1)$.

7.10. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проекции на плоскости всех граней: а) треугольника ACD; б) треугольника BB_1D.

7.11. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его образ при симметрии относительно: а) плоскости AA_1B; б) прямой AD; в) точки A.

7.12. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его образ при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом, равным 2.

7.13. Нарисуйте правильный тетраэдр $ABCD$ и его образ при симметрии относительно: а) плоскости ABC; б) плоскости ABD; в) точки O — центра треугольника BCD; г) прямой AB.

Вычисляем

7.14. Равносторонний треугольник со стороной a проектируется на плоскость α в равнобедренный треугольник, основание которого — a. Вычислите площадь проекции этого треугольника на плоскость, если известен угол φ между данной плоскостью и плоскостью данного треугольника. Как изменяется эта площадь при изменении угла φ?

Исследуем

7.15. Может ли гомотетия быть какой-нибудь симметрией?

7.16. Может ли быть тождественным преобразованием: а) гомотетия; б) параллельный перенос; в) какая-нибудь симметрия?

7.3. Взаимно обратные преобразования

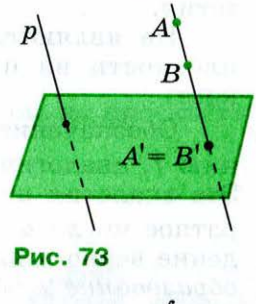


Рис. 73

Вообще говоря, при преобразовании фигуры различные её точки могут иметь один и тот же образ. Например, при проектировании на прямую (или на плоскость) различные точки могут иметь одну и ту же проекцию (рис. 73).

Но у всех преобразований, рассмотренных в предыдущем пункте, образы различных точек различны. (Можно сказать иначе: при этих преобразованиях каждая точка образа фигуры имеет только один прообраз.) Преобразование, при котором образы любых двух точек различны, называется **взаимно однозначным преобразованием**.

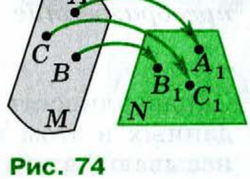


Рис. 74

Рассмотрим взаимно однозначное преобразование f фигуры M и её образ $N = f(M)$ при этом преобразовании (рис. 74).

Сопоставим теперь каждой точке фигуры N её прообраз при преобразовании f (рис. 75). Мы получим преобразование фигуры N в фигуру M (так как в силу взаимной однозначности преобразования f каждая точка фигуры N имеет только один прообраз). Полученное преобразование g фигуры N называется **обратным для преобразования f** и обозначается так: $g = f^{-1}$. Преобразования, имеющие обратные, называются **обратимыми преобразованиями**.

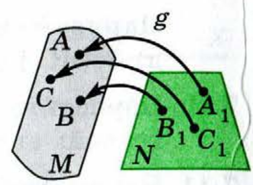


Рис. 75

Убедитесь, что все симметрии обратимы. Интересно, что обратными для симметрий преобразованиями являются сами эти симметрии: симметрии меняют местами взаимно симметричные точки (см. рис. 68—70)!

Перенос также обратим, и обратным преобразованием для переноса на вектор $\vec{a}$ является перенос на вектор $-\vec{a}$ (рис. 76).

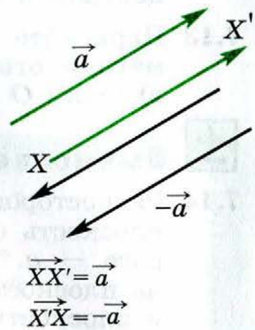


Рис. 76

Наконец, обратима и гомотетия. Если центром её была точка O, а коэффициентом ненулевое число k, то обратным для неё преобразованием будет также гомотетия с тем же центром и коэффициентом $\frac{1}{k}$. Это следует из равенства

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OX'}, \qquad (3)$$

вытекающего из равенства (2), которым определена исходная гомотетия.

Не являются обратимыми преобразованиями проектирование плоскости на прямую и проектирование пространства на плоскость.

Обозначение f^{-1} для преобразования, обратного преобразованию f, аналогично обозначению для числа a^{-1}, обратного числу a. Эта аналогия не случайна. Если мы далее будем искать число, обратное числу a^{-1}, то снова получим число a. Аналогичное утверждение верно и для обратимых преобразований: *если некоторое преобразование f обратимо, то обратное ему преобразование g также обратимо и обратным для него преобразованием является преобразование f.*

$$g^{-1} = (f^{1})^{-1} = f.$$

Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из данных в этом пункте определений. Поэтому преобразования f и g называют **взаимно обратными**.

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае преобразование обратимо?
2. В чём состоит преобразование, обратное данному преобразованию?
3. Чем являются преобразования, обратные симметриям?
4. В чём состоит преобразование, обратное переносу?

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Рисуем

7.17. Нарисуйте графики следующих функций, заданных на всей числовой оси: а) $y = 2x$; б) $y = -x^2$; в) $y = x^3$. Какие из этих функций взаимно однозначно преобразуют ось x в ось y?

7.18. Нарисуйте график какой-нибудь функции, преобразующей отрезок $[-2; 2]$ в отрезок $[0; 4]$: а) взаимно однозначно; б) не взаимно однозначно.

Рассуждаем

7.19. Какие известные вам функции обратимы? Почему?

7.20. Обратимы ли функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$, заданные на отрезке $[0; 180°]$? (Напомним, что синусы смежных углов равны.)

7.21. Приведите примеры взаимно обратных преобразований.

7.22. Обратимо ли тождественное преобразование? Если да, то какое у него обратное преобразование?

Исследуем

7.23. Может ли проектирование какой-нибудь фигуры на плоскость или на прямую быть обратимым?

7.4. Композиция преобразований

Пусть в результате некоторого преобразования f фигура M переводится в фигуру N, а затем фигура N ещё одним преобразованием g переводится в фигуру P (рис. 77). В итоге фигура M переводится в фигуру P преобразованием, которое осуществляется последовательным выполнением преобразований f и g: каждой точке X фигуры M сопоставляется точка $g(f(X))$ фигуры P. Это преобразование фигуры M в фигуру P, состоящее в

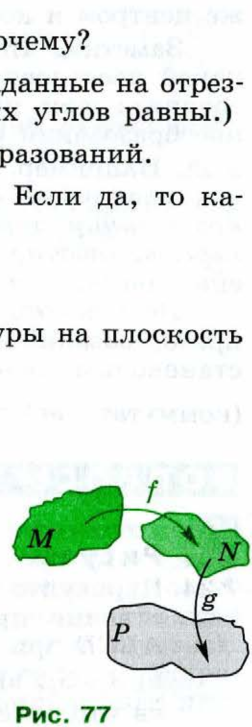


Рис. 77

последовательном выполнении преобразований f и g, называется **композицией преобразований** f и g и обозначается так: $g \circ f$.

С композицией преобразований вы встречались в курсе алгебры, когда рассматривали, например, такие функции: $\sqrt{ax+b}$, $(x+3)^2$, $\frac{a}{x+2}$. (В каждом из примеров укажите функции, композицией которых является указанная.)

Ясно, что композиция двух взаимно обратных преобразований фигуры каждую её точку оставляет на месте. Потому *композиция взаимно обратных преобразований является тождественным преобразованием*. Например, функция $(\sqrt{x})^2$ каждой точке x числовой оси, имеющей неотрицательную координату, сопоставляет эту же точку.

Композицией двух параллельных переносов на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является параллельный перенос на вектор, равный их сумме $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 78). Композицией двух гомотетий с общим центром и коэффициентами k_1 и k_2 является гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k_1 \cdot k_2$ (рис. 79).

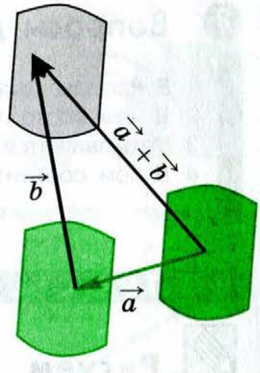
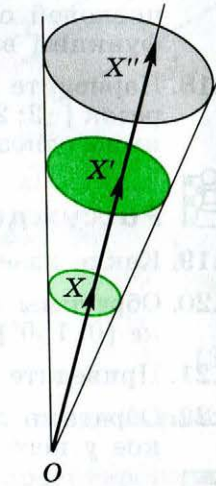


Рис. 78

Заметим, что, как правило, небезразлично, в какой последовательности выполняются преобразования: при изменении порядка выполнения преобразований результат может получиться разный. Например, $(x+1)^2$ и x^2+1 — это, конечно же, различные функции. Об этом говорят так: *композиция преобразований, вообще говоря, не перестановочна* (*не коммутативна*). Приведите ещё примеры, иллюстрирующие этот факт.

Но в некоторых важных случаях композиция преобразований перестановочна. Например, перестановочны переносы, так как перестановочно (коммутативно) сложение векторов: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.



$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OX'} &= k_1\overrightarrow{OX}\\ \overrightarrow{OX''} &= k_2\overrightarrow{OX'}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OX''} = k_1k_2\overrightarrow{OX}$$

Рис. 79

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Рисуем

7.24. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Обозначьте через a, b, c соответственно прямые AB, BC, AC. Нарисуйте образ квадрата $ABCD$ при композиции следующих преобразований: а) $S_a \circ S_b$; б) $S_c \circ S_a$; в) $S_a \circ S_c$. Какое получилось в каждом из этих случаев итоговое преобразование?

7.25. Нарисуйте правильный треугольник ABC с центром O. Нарисуйте образ отрезка AB при последовательном выполнении: а) переноса на вектор $\overrightarrow{AO}$ и симметрии относительно прямой AC; б) симметрий относительно прямых AC и BC; в) гомотетии с центром O и коэффициентом 2 и переноса на вектор $\overrightarrow{AC}$.

7.26. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с центром O. Нарисуйте образ отрезка BD_1 при композиции следующих преобразований: а) симметрии S_O и симметрии относительно плоскости ABC; б) гомотетии с центром O и коэффициентом 0,5 и переноса на вектор $\overrightarrow{AB}$; в) симметрии относительно прямой CC_1 и переноса на вектор $\overrightarrow{CC_1}$.

Доказываем

7.27. Докажите, что на плоскости композиция двух осевых симметрий относительно взаимно перпендикулярных прямых является симметрией относительно точки пересечения этих прямых.

Представляем

7.28. На плоскости композиция двух проектирований любую фигуру преобразует в точку. Какие это проектирования?

7.29. Каким преобразованием является композиция двух симметрий относительно взаимно перпендикулярных плоскостей?

§ 8. Движения

8.1. Определение и простейшие свойства движений

Знакомство с двумя важнейшими классами геометрических преобразований мы начнём с класса тех преобразований, которые сохраняют все свойства фигур. Вы, по-видимому, уже заметили, что любое геометрическое свойство можно выразить через расстояния между точками, через длины соединяющих эти точки отрезков. И геометрические величины выражаются через расстояния. Например, вы умеете находить углы и площадь треугольника, зная длины его сторон. Следовательно, вы знаете, как найти площадь и углы любого многоугольника, если известны все расстояния между его вершинами.

Точно так же, зная все расстояния между вершинами многогранника, можно найти площадь его поверхности и его объём. Те преобразования, которые сохраняют расстояния, сохраняют и все другие свойства геометрических фигур. Такие преобразования называют *движениями*.

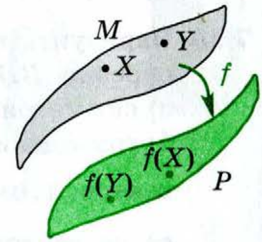


Рис. 80

Определение. Движением фигуры называется такое её преобразование, которое сохраняет расстояния между любыми её точками.

Подробнее: преобразование f фигуры M называется движением, если расстояние между любыми двумя точками X и Y фигуры M равно расстоянию между их образами $X' = f(X)$ и $Y' = f(Y)$ (рис. 80), т. е. для любых точек X и Y выполняется равенство

$$|X'Y'| = |XY|. \qquad (1)$$

Ясно, что *тождественное преобразование является движением.*

Подумайте, какие из преобразований: центральная симметрия, осевая симметрия, зеркальная симметрия, параллельный перенос, гомотетия, являются движениями и какие из них движениями не являются.

Движения являются взаимно однозначными преобразованиями.

□ Действительно, различные точки X и Y движение f не может перевести в одну точку, ведь $|f(X)f(Y)| = |XY| > 0$, а потому $f(X)$ и $f(Y)$ различны. ■

Поскольку движения взаимно однозначны, то они обратимы. Преобразование, обратное движению, также является движением, так как оно сохраняет расстояния.

Итак, *каждое движение обратимо, и обратное ему преобразование также является движением.*

Выполним последовательно сначала движение f фигуры M, а затем движение g фигуры $f(M)$ (рис. 81). Так как f сохраняет расстояния и g сохраняет расстояния, то и их композиция $g \circ f$ тоже сохраняет расстояния. Поэтому **композиция движений является движением.**

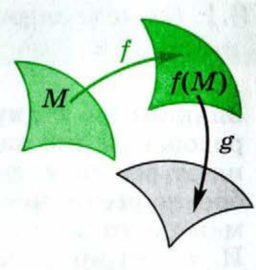


Рис. 81

▲ *Разговор о механическом и геометрическом движении.* Выясним более подробно связь того движения, которое определяется в геометрии, с реальным движением тел.

Представим себе какое-нибудь реальное тело в некотором определённом положении. Каждая его частица занимает определённое положение — находится в определённой точке X пространства. Допустим, предмет изменил своё положение. Это значит, каждая его частица заняла некоторое новое (или старое) положение. Данная частица, бывшая в точке X, заняла положение в точке X'; тем самым движение предмета устанавливает соответствие между точками пространства: точка X' соответствует точке X. (Можно сказать ещё так: месту X, где находилась частица, соответствует место X', где она теперь находится.)

В механике тело называется твёрдым или даже абсолютно твёрдым, если оно не допускает никаких деформаций, так что расстояния между его частицами неизменны. Поэтому если при движении такого тела две его частицы (или точки) X и Y перешли в точки X' и Y', то расстояния сохраняются:

$$|XY| = |X'Y'|,$$

т. е. происходит движение, как мы его определили, геометрически.

В геометрическом понятии движения удерживают только сопоставление одного положения тела с другим, вовсе отвлекаясь от процесса движения. Сам этот процесс можно назвать непрерывным движением.

Оказывается, что любое движение в геометрии представляет собой либо отвлечённый образ реального движения твёрдого тела, когда учитывается только то, из каких точек пространства в какие точки переходят частицы тела (т. е. учитывается только соответствие одних точек другим), либо сочетание (композицию) этого отвлечённого образа реального движения с зеркальной симметрией.

Только что сказанное о движениях принадлежит не самой геометрии, а её связи с физикой. Геометрия здесь выступает как первая глава механики, трактующая механическое движение. Без движения геометрия не могла бы существовать. В самом деле, уже сравнение отрезков и измерение длин основаны на движении предметов, когда один прикладывается к другому. Поэтому Ньютон в предисловии к великому труду «Математические начала натуральной философии» писал, что геометрия основывается на механике. ▼

Вопросы для самоконтроля

1. Какое преобразование называется движением?
2. Обратимо ли движение? Каким преобразованием является преобразование, обратное движению?
3. Каким преобразованием является композиция движений?

ЗАДАЧИ

Исследуем

8.1. Может ли проектирование какой-нибудь фигуры на плоскость (на прямую) быть движением?

8.2. Является ли гомотетия движением? Может ли какая-нибудь гомотетия быть движением?

8.3. Постройте точку $(x'; y')$ — образ произвольной точки $(x; y)$ для преобразований, заданных уравнениями:
а) $x' = -x,\ y' = y$; б) $x' = -x,\ y' = -y$; в) $x' = x,\ y' = 2y$; г) $x' = x + 3,\ y' = -y - 1$; д) $x' = 3x,\ y' = 3y$; е) $x' = 0{,}6x - 0{,}8y,\ y' = 0{,}8x + 0{,}6y$. Какие из этих преобразований являются движениями?

8.2. Свойства фигур, сохраняющиеся при движении (инварианты движений)

Изучая различные преобразования, мы каждый раз будем интересоваться, какие свойства фигур сохраняются при этих преобразованиях. Свойства фигур, сохраняющиеся при тех или иных преобразованиях, называются **инвариантами** этих преобразований. Например, расстояние между точками является инвариантом движения, а инвариантом гомотетии или проектирования не является.

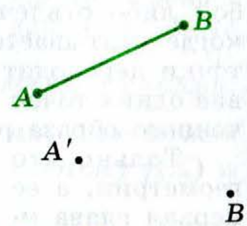


Рис. 82

Перейдём к изучению инвариантов движений, формулируя соответствующие свойства фигур и давая им необходимые пояснения, а иногда и доказывая их. Хотя мы уже говорили, что движения сохраняют все свойства фигур, но это утверждение следует обосновать.

1. Движение переводит отрезок в равный ему отрезок.

Другими словами, *образом отрезка при движении является равный ему отрезок.*

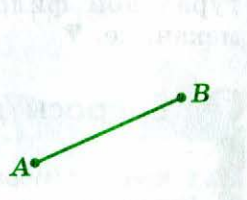


Рис. 83

★ **Доказательство.** Пусть движение f переводит концы отрезка AB в точки A' и B' (рис. 82). Возникает вопрос: не может ли при движении отрезок превратиться в кривую линию или ломаную (как в случае, изображённом на рисунке 83)?

Точнее говоря, верно ли, что любая точка X отрезка AB перейдёт в такую точку X', которая лежит на отрезке $A'B'$? И верно ли утверждение, что при этом преобразовании каждая точка отрезка $A'B'$ является образом некоторой точки отрезка AB?

Ответы на эти два вопроса положительны, и мы сейчас это докажем.

1) Возьмём произвольную точку X отрезка AB и покажем, что её образ $X' = f(X)$ принадлежит отрезку $A'B'$.

Поскольку точка X принадлежит отрезку AB, то

$$|AX| + |XB| = |AB|. \tag{2}$$

Так как f — движение, то $A'X' = AX$, $X'B' = XB$, $A'B' = AB$. Поэтому, учитывая равенство (2), получаем, что

$$|A'X'| + |X'B'| = |A'B'|. \tag{3}$$

Из этого равенства следует, что точка X' принадлежит отрезку $A'B'$ (в противном случае $|A'X'| + |X'B'| > |A'B'|$ по «неравенству треугольника»).

2) Каждая точка Y отрезка $A'B'$ является образом при движении f некоторой точки отрезка AB, а именно той точки X, которая удалена от точки A на расстояние $|A'Y|$.

Ответив утвердительно на поставленные вопросы, мы доказали, что $f(AB) = A'B'$. Осталось доказать равенство отрезков $A'B'$ и AB. Но это очевидно, так как движение сохраняет расстояния между точками: $|AB| = |A'B'|$. ■★

Проведя аналогичные рассуждения, можно доказать, что

2. Образом луча при движении является луч.

3. Образом прямой при движении является прямая. (Сделайте это самостоятельно.)

4. Образом треугольника при движении является равный ему треугольник.

□ Каждый треугольник ABC заполняется отрезками AX, идущими из его вершины A в точки X противоположной ей стороны BC (рис. 84). Пусть движением f точки A, B, C переводятся соответственно в точки A', B', C'. Тогда этим движением f отрезки AX переводятся в отрезки $A'X'$, заполняющие треугольник $A'B'C'$ (рис. 84). Поскольку $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ и $B'C' = BC$, то $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$. ■

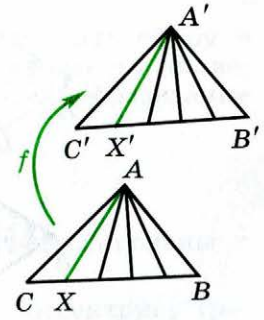


Рис. 84

Аналогичные рассуждения можно провести и относительно тетраэдров и тем самым доказать, что

5. Образом тетраэдра при движении является тетраэдр (рис. 85).

Движением треугольник переводится в равный ему треугольник, а соответственные углы равных треугольников равны, поэтому

6. Движение сохраняет углы; в частности, движение сохраняет перпендикулярность и параллельность.

Утверждение об инвариантности углов при движении надо понимать широко: оно касается и двугранных углов, и углов между прямой и плоскостью, и углов между направленными отрезками.

Ведь измерение всех этих углов сводится к измерению плоских углов. Кроме того, надо иметь в виду, что в утверждении 6 говорится как о сохранении величин углов, так и о сохранении вида углов: плоские углы переходят при движении в плоские, двугранные углы — в двугранные и т. д.

Далее, многоугольники составляются из треугольников. При движении f многоугольника P его образ $f(P)$ будет составлен из образов треугольников, составляющих многоугольник P (рис. 86).

Поэтому $f(P)$ является многоугольником. Следовательно,

7. При движении образом многоугольника является многоугольник.

Кроме того, из наших рассуждений следует, что **при движении углы и расстояния между вершинами многоугольника соответственно равны углам и расстояниям между вершинами его образа** (рис. 87), **а также равны и площади этих многоугольников.**

Наконец, аналогично предыдущему свойству движений можно установить, что

8. Образом многогранника при движении является многогранник, у которого расстояния между вершинами, углы, площади гра-

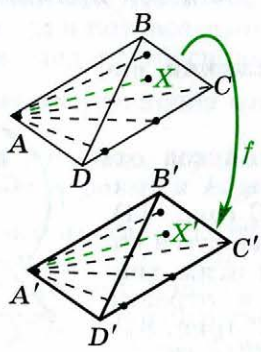


Рис. 85

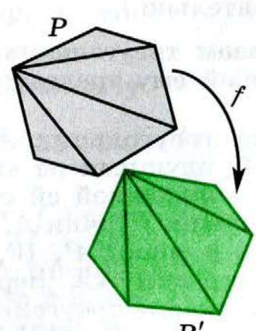


Рис. 86

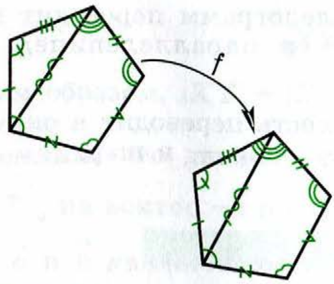


Рис. 87

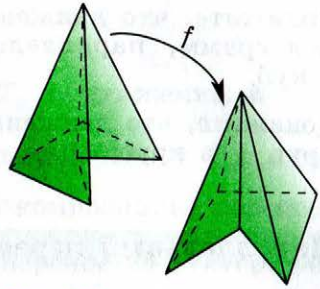


Рис. 88

ней и объём соответственно равны расстояниям между вершинами, углам, площадям граней и объёму исходного многогранника (рис. 88).

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите свойства фигур, сохраняющиеся при движениях (инварианты движений).
2. Почему движение три точки, лежащие (не лежащие) на одной прямой, переводит в три точки, лежащие (не лежащие) на одной прямой?

ЗАДАЧИ

Рисуем

8.4. Нарисуйте различные пары фигур так, чтобы в каждом случае одна из фигур могла бы быть получена из другой некоторым движением.

Исследуем

8.5. Можно ли каким-нибудь преобразованием отобразить сферу в круг того же радиуса? В случае положительного ответа приведите соответствующий пример. Может ли такое преобразование быть движением?

Доказываем

8.6. Докажите те свойства движений, которые сформулированы в тексте, но не доказаны.

8.7. Докажите, что движение переводит медиану и биссектрису треугольника соответственно в медиану и биссектрису его образа.

8.8. Докажите, что движение параллелограмм переводит в параллелограмм, параллелепипед — в параллелепипед, куб — в куб.

8.9. Докажите, что движение окружность переводит в окружность, круг — в круг, сферу — в сферу, шар — в шар.

8.3. Параллельный перенос

Изучив общие свойства движений, последовательно рассмотрим все частные виды движений (оказывается, их совсем немного). Начнём с самого простого движения — параллельного переноса (короче — переноса). Будем рассматривать переносы, заданные на всём пространстве.

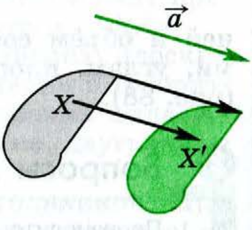


Рис. 89

Напомним, что **параллельным переносом** (или, короче, **переносом) на вектор** $\vec{a}$ называется преобразование, которое каждой точке X ставит в соответствие такую точку X' (рис. 89), что

$$\overrightarrow{XX'} = \vec{a}. \qquad (4)$$

Перенос на вектор $\vec{a}$ обозначаем T_a, а вектор $\vec{a}$ называем **вектором переноса**.

Итак, задать перенос T_a можно либо вектором переноса $\vec{a}$, либо (что равносильно) некоторой (любой!) точкой X и её образом $X' = T_a(X)$.

Построение образа Y' любой другой точки Y состоит в откладывании от точки Y вектора $\overrightarrow{YY'} = \vec{a}$.

Если вектор переноса не нулевой, то перенос неподвижных точек не имеет. Если же вектор переноса нулевой, то у такого переноса все точки неподвижны. Поэтому *параллельный перенос на нуль-вектор является тождественным преобразованием.*

Докажем, что **параллельный перенос является движением.**

□ Пусть перенос T_a ставит в соответствие точке X точку X', а точке Y точку Y', тогда выполняются равенства $\overrightarrow{XX'} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{YY'} = \vec{a}$ (рис. 90). Поэтому

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}. \qquad (5)$$

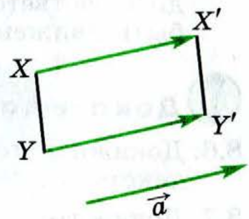


Рис. 90

Из равенства (5), согласно третьему признаку равенства векторов (п. 1.3), следует

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}. \tag{6}$$

Таким образом, $|XY| = |X'Y'|$, т. е. T_a — движение. ■

Напомним, что движением, обратным переносу T_a, является перенос T_{-a} на вектор $-\vec{a}$ (см. рис. 76), а композицией переносов на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является параллельный перенос на вектор, равный их сумме $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 78). Поскольку сложение векторов коммутативно, то *композиция переносов коммутативна.*

Характерное свойство параллельного переноса формулируется так: **параллельный перенос является движением, сохраняющим направления.**

Это свойство выражается равенством (6): равенство длин векторов $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{X'Y'}$ означает, что перенос — движение, а сонаправленность этих векторов говорит о том, что при переносе сохраняются направления. Иначе говоря, *расстояния и направления — инварианты параллельного переноса.*

Характерное свойство некоторого объекта должно являться одновременно и его признаком. И среди всех движений переносы выделяются следующим признаком:

ПРИЗНАК **Движение, сохраняющее все направления, является параллельным переносом.**

Доказательство. Пусть f — движение, которое сохраняет все направления. Это значит, что для любых двух точек X и Y и их образов $X' = f(X)$ и $Y' = f(Y)$ выполняются два условия: $|\overrightarrow{XY}| = |\overrightarrow{X'Y'}|$ и $\overrightarrow{X'Y'} \upuparrows \overrightarrow{XY}$. А это значит, что выполняется равенство (6). Но тогда справедливо и равенство (5), т. е. движение f перемещает все точки в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Следовательно, f — перенос на вектор $\vec{a} = \overrightarrow{XX'}$. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Чем является композиция двух переносов?
2. Каково характерное свойство переноса?

ЗАДАЧИ

Рисуем

8.10. Нарисуйте какую-нибудь фигуру и какой-то ненулевой вектор $\vec{a}$. Постройте образ этой фигуры при переносе на вектор $\vec{a}$. Решите эту задачу, выбрав в качестве исходной фигуры: а) треугольник; б) четырёхугольник; в) круг; г) параллелепипед.

8.11. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его образ при параллельном переносе на вектор с началом в вершине A и концом в вершине: а) A_1; б) C; в) C_1.

8.12. Нарисуйте правильную пирамиду $PABCD$ с вершиной P. Пусть центр основания пирамиды — точка O. Нарисуйте также образ этой пирамиды при переносе на вектор: а) $\overrightarrow{PO}$; б) $\overrightarrow{AP}$; в) $\overrightarrow{AO}$; г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$.

Доказываем

8.13. На координатной плоскости уравнением $x^2 + y^2 = 1$ задана окружность. Докажите, что образ этой окружности при переносе на вектор $\vec{a}(a; b)$ задаётся уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$.

Вычисляем

8.14. Пусть параллелограмм P имеет площадь S. Пусть точка A — его вершина, O — точка пересечения его диагоналей, Q — образ параллелограмма P при переносе на вектор $\overrightarrow{AO}$. Нарисуйте пересечение и объединение фигур P и Q и найдите их площади.

8.15. Пусть $\triangle ABC$ имеет площадь S и точка O — его центр масс. Нарисуйте образ $\triangle ABC$ при переносе на вектор $\overrightarrow{AO}$. Вычислите площади пересечения и объединения $\triangle ABC$ и его образа.

8.4. Центральная симметрия

Напомним, что **центральной симметрией S_O с центром O** называется такое преобразование фигуры, которое каждой её точке X сопоставляет точку X', симметричную ей относительно точки O (рис. 91). Из этого определения сле-

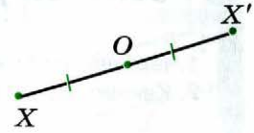


Рис. 91

дует, что центральную симметрию S_O задаёт указание её центра O. Фиксируя точку O, мы легко строим образ $X' = S_O(X)$ любой точки X (отличной от O): продолжаем отрезок XO за точку O на отрезок OX', равный отрезку XO (см. рис. 91), т. е. точка O является серединой отрезка XX'. Если же $X = O$, то $S_O(O) = O$.

На векторном языке это можно записать так:

$$\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}. \quad (7)$$

Неподвижной точкой центральной симметрии S_O является лишь её центр O.

Докажем, что центральная симметрия сохраняет расстояния, т. е. является движением.

□ Пусть центральная симметрия S_O ставит в соответствие точке X точку X', а точке Y точку Y' (рис. 92). Тогда выполняются равенства (7) и

$$\overrightarrow{OY'} = -\overrightarrow{OY}. \quad (8)$$

Из равенств (7) и (8) следует, что

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}.$$

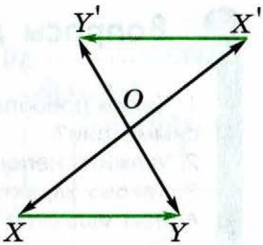


Рис. 92

Итак, для любой пары точек X, Y и их образов X', Y' выполняется векторное равенство

$$\overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{XY}. \blacksquare \quad (9)$$

Оно означает, во-первых, что длины отрезков XY и $X'Y'$ равны, т. е. *центральная симметрия является движением.* А во-вторых, равенство (9) говорит о том, что векторы $\overrightarrow{X'Y'}$ и $\overrightarrow{XY}$ направлены противоположно, т. е. *центральная симметрия изменяет направления векторов на противоположные.*

Это свойство является характерным свойством центральной симметрии, выделяющим её среди движений. А именно: **движение, изменяющее направление каждого вектора на противоположное, является центральной симметрией.** Докажем это утверждение.

★□ Рассмотрим такое движение f, что для любой пары точек X, Y и их образов $X' = f(X)$, $Y' = f(Y)$ выполняется векторное равенство

$$\overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{XY}.$$

Пусть точка O — середина отрезка XX' (если $X = X'$, то $O = X$). Тогда выполняется равенство (7). Из равенств (7) и (9) следует равенство (8), так как

$$\overrightarrow{OY'} = \overrightarrow{OX'} + \overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{OY},$$

а это и значит, что точка O — середина отрезка YY', т. е. его концы симметричны относительно точки O. Итак, движение f — центральная симметрия с центром O. ■★

Характерные свойства переноса и центральной симметрии позволяют легко установить, каким движением является любая композиция переносов и центральных симметрий. Например, рассмотрим композицию двух центральных симметрий S_O и S_P с центрами O и P. Такая композиция является движением, не изменяющим направления векторов (двукратное изменение направления оставляет его прежним!), т. е. переносом. Выясните самостоятельно, каков вектор этого переноса. Обладает ли эта композиция свойством коммутативности?

Вопросы для самоконтроля

1. Каким преобразованием является преобразование, обратное центральной симметрии?
2. Укажите неподвижные точки центральной симметрии.
3. Каково характерное свойство центральной симметрии?
4. Чем является композиция двух центральных симметрий?

ЗАДАЧИ

Представляем

8.16. Как расположены прямая и её образ при центральной симметрии?

Исследуем

8.17. Чем является композиция переноса и центральной симметрии?

Вычисляем

8.18. Нарисуйте треугольник ABC. Обозначьте через O точку пересечения его медиан. Постройте треугольник $S_O(\triangle ABC)$. Нарисуйте его пересечение с треугольником ABC и найдите его площадь, считая, что площадь треугольника ABC равна 1.

8.5. Осевая симметрия на плоскости

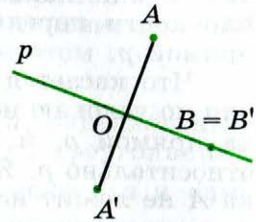


Рис. 93

Все утверждения, доказанные нами в двух предыдущих пунктах, оказываются верными для параллельных переносов и центральных симметрий как на плоскости, так и в пространстве. Для других движений это не так. Поэтому мы будем рассматривать сначала движение на плоскости, а затем аналогичное движение в пространстве.

Начнём с осевой симметрии на плоскости. Напомним, что **симметрией фигуры относительно некоторой прямой (осевой симметрией)** называется преобразование этой фигуры, которое каждой её точке A сопоставляет точку A', симметричную точке A относительно этой прямой (рис. 93).

Осевую симметрию относительно прямой p мы обозначаем S_p.

Сначала докажем, что **осевая симметрия плоскости является движением.**

Для доказательства воспользуемся методом координат.

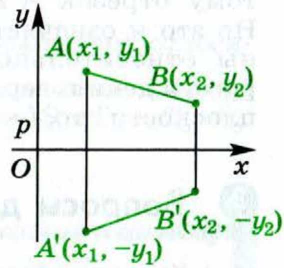


Рис. 94

★□ Введём декартовы координаты так, чтобы ось симметрии p была осью Ox (рис. 94).

Возьмём две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. У симметричных им относительно оси Ox точек абсциссы те же, а ординаты противоположны. Поэтому $S_p(A) = A'(x_1; -y_1)$ и $S_p(B) = B'(x_2; -y_2)$. Выразив расстояния AB и $A'B'$ через координаты, получим

$$|A'B'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2} = |AB|.$$

Итак, осевая симметрия сохраняет расстояния между точками, т. е. является движением. ■★

Среди всех движений плоскости осевые симметрии выделяются следующим характерным признаком:

ПРИЗНАК **Движение плоскости, у которого множество неподвижных точек — прямая, является осевой симметрией.**

Доказательство. Пусть f — данное движение, о котором нам известно, что все точки некоторой прямой (назовём её p) неподвижны, а других неподвижных точек при этом движении нет. Нам нужно доказать, что f — симметрия относительно прямой p. Значит, нужно доказать, что при этом преобразовании каждая точка плоскости переходит в точку, симметричную ей относительно прямой p.

Что касается точек, лежащих на прямой p, так это очевидно: они по условию неподвижны. Возьмём любую точку A, не лежащую на прямой p, и покажем, что её образ $A' = f(A)$ симметричен A относительно p. Ясно, что точки A' и A не совпадают, так как точка A не лежит на прямой p. Опустим на прямую p перпендикуляр AB (рис. 95).

Так как B — неподвижная точка при движении f, то $f(AB) = A'B$, а так как f — движение, то $AB = A'B$. Движение сохраняет не только расстояния, но и перпендикулярность, а потому отрезок $A'B$ перпендикулярен прямой p. Но это и означает, что точки A и A' симметричны относительно прямой p. И поскольку эти рассуждения верны для произвольной точки A плоскости, то $f = S_p$. ■

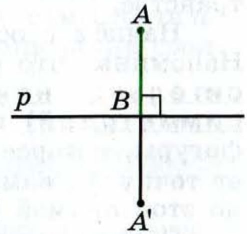


Рис. 95

Вопросы для самоконтроля

1. Каким преобразованием является преобразование, обратное осевой симметрии?
2. Укажите неподвижные точки осевой симметрии.
3. Каково характерное свойство осевой симметрии?
4. Какие формулы задают осевую симметрию с осью на оси абсцисс?

ЗАДАЧИ

Рисуем

8.19. Нарисуйте какую-нибудь ломаную и прямую a, пересекающую эту ломаную. Нарисуйте ломаную, симметричную первой относительно прямой a.

8.20. Нарисуйте произвольную фигуру и какую-нибудь прямую a. Нарисуйте образ этой фигуры при симметрии относительно прямой a. Решите эту задачу, выбрав в качестве исходной фигуры: а) треугольник; б) пятиугольник; в) круг; г) параллелограмм.

8.21. Нарисуйте прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C прямой. Нарисуйте треугольник, симметричный данному относительно: а) прямой AC; б) прямой BC; в) прямой AB. Какой фигурой в каждом случае является объединение данного треугольника и построенного? Может ли при этом получиться квадрат?

8.22. Нарисуйте какую-нибудь прямую l и вектор $\vec{a}$, параллельный этой прямой. Нарисуйте образ какого-нибудь треугольника при композиции параллельного переноса на вектор $\vec{a}$ и симметрии относительно прямой l.

Доказываем

8.23. Две прямые a и b пересекаются в точке O и симметричны друг другу относительно прямой c. Докажите, что точка O принадлежит прямой c.

8.24. Композиция параллельного переноса T_a и симметрии относительно прямой p, параллельной вектору $\vec{a}$, называется **скользящей осевой симметрией**. Докажите, что $S_p \circ T_a = T_a \circ S_p$.

Исследуем

8.25. Нарисуйте два равных треугольника. Как осевыми симметриями один из них перевести в другой?

8.26. Пусть a и b — прямые, а $c = S_a(b)$. В каком случае: а) $b = c$; б) $b \parallel c$; в) b и c пересекаются?

8.27. На координатной плоскости уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$ задана окружность. Каким уравнением задан образ этой окружности при симметрии относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) прямой, заданной уравнением $x = a$?

▲ 8.6. Зеркальная симметрия

В пространстве аналогом изученной нами в п. 8.5 осевой симметрии на плоскости является зеркальная симметрия — симметрия относительно плоскости.

Во-первых, **симметрией S_α фигуры относительно некоторой плоскости α (зеркальной симметрией)** называется преобразование этой фигуры, которое каждой её точке A сопоставляет точку A', симметричную точке A относительно этой плоскости (рис. 96).

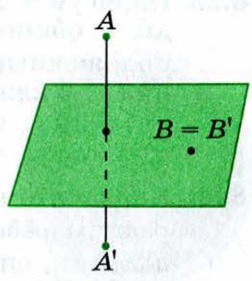


Рис. 96

Во-вторых, чтобы доказать, что **зеркальная симметрия — движение**, можно, как и в случае осевой симметрии, применить метод координат, взяв в качестве координатной плоскости xOy плоскость α (рис. 97).

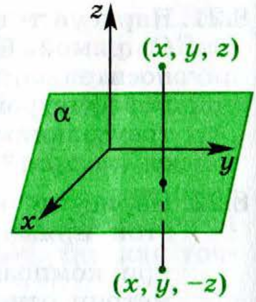


Рис. 97

В-третьих, **преобразованием, обратным симметрии относительно плоскости, является симметрия относительно той же плоскости, т. е. зеркальная симметрия сама себе обратна** (как и все симметрии).

В-четвёртых, признак, выделяющий зеркальную симметрию среди всех движений пространства, аналогичен характерному признаку осевой симметрии на плоскости. Этот

ПРИЗНАК **Движение пространства, множество неподвижных точек которого есть плоскость, является симметрией относительно этой плоскости.**

Доказательство этого признака совершенно аналогично доказательству признака осевой симметрии, проведённому в п. 8.5.

Вопросы для самоконтроля

1. Каким преобразованием является преобразование, обратное зеркальной симметрии?
2. Укажите неподвижные точки зеркальной симметрии.
3. Каково характерное свойство зеркальной симметрии?
4. Какие формулы задают симметрию относительно координатной плоскости xOy? ▼

ЗАДАЧИ

Рисуем

8.28. Нарисуйте две равные правильные четырёхугольные пирамиды с общим основанием $ABCD$ и вершинами P и P_1, расположенные по разные стороны от плоскости этого основания. Укажите отрезок, симметричный отрезку PC, и треугольник, симметричный треугольнику ABP_1 относительно плоскости ABC.

8.29. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть точки M, N, P, Q — середины рёбер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 соответственно. Нарисуйте: а) точки, симметричные точкам A, B, C относительно плоскости $MNPQ$; б) точки, симметричные точкам A, D, B_1 относительно плоскости ACA_1C_1; в) отрезки, симметричные отрезкам

AB, DA_1, BB_1 относительно плоскости $MNPQ$; г) отрезки, симметричные отрезкам AB, DA_1, BB_1 относительно плоскости ACA_1C_1.

8.30. Нарисуйте правильную треугольную пирамиду и плоскость α, проходящую через середины её боковых рёбер. Постройте образ этой пирамиды при симметрии относительно плоскости α. Выделите объединение и пересечение построенных пирамид.

8.31. Решите задачу, аналогичную предыдущей, для правильной четырёхугольной пирамиды.

Доказываем

8.32. ▲ Композиция симметрии S_α относительно плоскости α и параллельного переноса T_a на вектор $\vec{a}$, параллельный плоскости α, называется **скользящей зеркальной симметрией**. Докажите, что $S_\alpha \circ T_a = T_a \circ S_\alpha$.

Исследуем

8.33. Чем является композиция двух зеркальных симметрий относительно двух параллельных плоскостей? Коммутативна ли она? ▼

8.7. Поворот на плоскости

Рис. 98

Рис. 99

Примеры поворотов на плоскости дают нам стрелки часов (рис. 98) или каких-либо приборов, например спидометра (рис. 99), барометра и др.

Стрелки приборов могут двигаться в направлении движения стрелки часов (например, так движется стрелка барометра, когда атмосферное давление растёт). Но возможно движение стрелки прибора и против часовой стрелки (так движется стрелка барометра, когда атмосферное давление падает). Этими механическими представлениями о направлении поворота *по часовой стрелке* или *против неё* мы воспользуемся при определении поворота фигуры на плоскости.

Поворотом фигуры M на плоскости с центром в точке O на угол φ в данном направлении называется такое преобразование фигуры M, при котором каждой точке X, отличной от точки O, сопоставляется такая точка X', что, во-первых, $|OX| = |OX'|$, во-вторых,

$\angle XOX' = \varphi$ и, в-третьих, угол XOX' откладывается от луча OX в заданном направлении (рис. 100). При этом точка O называется *центром поворота*, а угол φ — углом поворота.

Если же центр поворота O принадлежит фигуре M, то при повороте этой фигуры он является неподвижной точкой поворота. Поворот с центром в точке O называют также поворотом *вокруг точки O*.

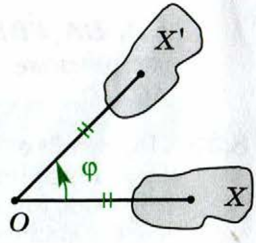


Рис. 100

Итак, при повороте фигуры M вокруг точки O все отрезки OX, идущие из точки O в точки X этой фигуры, поворачиваются в одном и том же направлении на один и тот же угол (рис. 101).

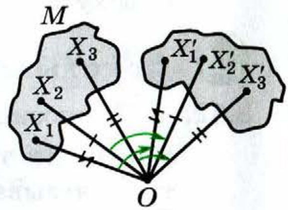


Рис. 101

Если в качестве фигуры M рассматривают всю плоскость, то говорят не о повороте на плоскости, а о повороте плоскости.

Отметим, что *поворот плоскости на 180° является симметрией относительно центра поворота* (рис. 102);

поворот плоскости на нулевой угол есть тождественное преобразование.

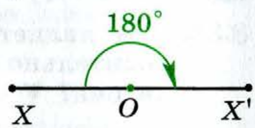


Рис. 102

Доказать, что поворот плоскости является движением, сложнее, чем доказать то же самое для переноса или симметрии. Выделим это утверждение как *теорему о повороте*.

Теорема **Поворот плоскости является движением.**

★ **Доказательство.** Пусть при повороте f вокруг точки O на угол φ точкам X и Y сопоставляются точки X' и Y'. Покажем, что $X'Y' = XY$.

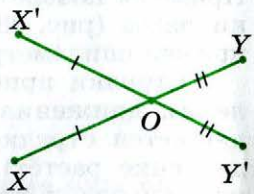


Рис. 103

В частном случае, когда точки X и Y лежат на одной прямой с точкой O (рис. 103, 104), требуемое равенство сразу следует из того, что отрезок XY является суммой или разностью отрезков OX и OY (проведите соответствующие рассуждения самостоятельно).

Более трудным является общий случай, когда точки O, X, Y не лежат на одной прямой. Покажем сначала, что

$$\angle X'OY' = \angle XOY. \qquad (10)$$

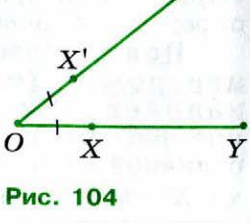


Рис. 104

Действительно, пусть сначала направление поворота внутри угла XOY от луча OX к лучу OY совпадает с направлением поворота f (рис. 105). Тогда, с одной стороны,

$$\angle XOY' = \angle XOY + \angle YOY' = \angle XOY + \varphi. \qquad (11)$$

С другой стороны,

$$\angle XOY' = \angle XOX' + \angle X'OY' = \angle X'OY' + \varphi. \quad (12)$$

Из равенств (11) и (12) следует равенство (10).

Если же направление поворота внутри угла XOY от луча OX к лучу OY противоположно направлению поворота f (рис. 106), то

$$\angle YOX' = \angle YOX + \angle XOX' = \angle XOY + \varphi \quad (11')$$

и

$$\angle YOX' = \angle YOY' + \angle Y'OX' = \angle X'OY' + \varphi. \quad (12')$$

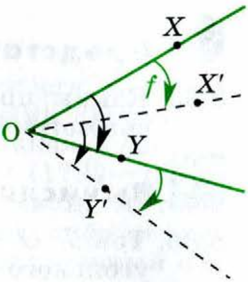


Рис. 105

Из равенств (11′) и (12′) снова получаем равенство (10).

Теперь докажем равенство отрезков XY и $X'Y'$.

Рассмотрим треугольники XOY и $X'OY'$. Они равны, так как $OX = OX'$, $OY = OY'$, $\angle XOY = \angle X'OY'$. Следовательно, $XY = X'Y'$. ■

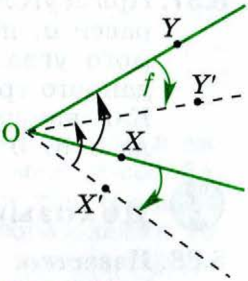


Рис. 106

Среди всех движений плоскости поворот выделяется следующим признаком:

ПРИЗНАК **Движение плоскости, имеющее единственную неподвижную точку, является поворотом плоскости вокруг этой точки.**

Мы этот признак не используем, а потому его не доказываем. ★

Вопросы для самоконтроля

1. Чем задаётся поворот на плоскости?
2. Каким преобразованием является преобразование, обратное повороту?
3. Укажите неподвижные точки поворота.
4. Может ли поворот быть одной из симметрий?

ЗАДАЧИ

Рисуем

8.34. Ромб $ABCD$ с углом A, равным $60°$, повернули на $120°$ по часовой стрелке и против неё вокруг точки D и получили две новые фигуры. Какой фигурой является объединение двух полученных фигур и данного ромба?

Представляем

8.35. Каким преобразованием является композиция двух осевых симметрий, оси которых пересекаются?

Вычисляем

8.36. Точка O — середина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника T с катетом, равным 1. Треугольник T_1 получен из треугольника T поворотом вокруг точки O на $90°$. Найдите площадь пересечения и объединения треугольников T и T_1.

8.37. Прямоугольный равнобедренный треугольник, катет которого равен a, повернули на угол, равный α, вокруг вершины прямого угла. Определите площади пересечения и объединения данного треугольника и его образа при повороте, если $\alpha = 45°$. Как изменится каждая из этих площадей при изменении угла α от $0°$ до $90°$?

Доказываем

8.38. Известно, что прямая a получена из прямой b поворотом вокруг некоторой точки на угол α. Докажите, что один из углов, образованных прямыми a и b, равен α.

Исследуем

8.39. Равнобедренный треугольник T с вершиной O и углом φ при вершине поворачивают вокруг точки O на углы φ, 2φ, 3φ, 4φ и т. д. При каких углах φ объединение треугольника T и его образов при этих поворотах является правильным многоугольником? Сделайте несколько рисунков. Может ли треугольник T быть тупоугольным?

8.40. Нарисуйте два равных отрезка, лежащие в одной плоскости. Найдите движение плоскости, с помощью которого один отрезок может быть преобразован в другой. Рассмотрите различные случаи взаимного расположения отрезков на плоскости.

8.41. На плоскости последовательно выполнили два поворота с одним и тем же центром. Какое движение плоскости получилось? Рассмотрите различные углы поворотов.

8.42. На координатной плоскости xOy точка A имеет координаты $(a; b)$. Какие координаты будет иметь образ этой точки при повороте вокруг начала координат на угол $90°$: а) по часовой стрелке; б) против часовой стрелки?

▲ 8.8. Классификация движений плоскости

Изучив совсем немного частных видов движений плоскости, мы, оказывается, познакомились со всеми возможными видами движений. Обоснованием этого факта является теорема, доказанная в середине XIX в. французским геометром Мишелем Шалем (1793—1880). Согласно этой теореме, **любое движение плоскости является либо поворотом, либо переносом, либо осевой симметрией, либо композицией осевой симметрии и переноса на вектор, параллельный оси симметрии.** Такая композиция называется *скользящей симметрией*. Интересно, что каждое из этих движений может быть представлено в виде композиции не более чем трёх осевых симметрий. Доказательство этой теоремы вы можете найти в учебниках для углублённого изучения геометрии. ▼

8.9. Равенство фигур и движения

О движениях фигур неявно говорится в «Началах» Евклида в аксиоме 7: «И совмещающиеся друг с другом равны между собой». В этой аксиоме после слова «совмещающиеся» так и хочется добавить слово «движением»: ведь именно об этом преобразовании говорит Евклид. Теперь, почти повторяя Евклида, мы можем определить равенство фигур таким образом:

Определение 1. **Фигуры** называются **равными**, если их можно совместить движением.

Другими словами, фигуры M и P называются равными, если найдётся такое движение f, что $f(M) = P$ (см. рис. 80).

Равенство двух фигур можно определить и не употребляя термин «движение».

Определение 2. Две **фигуры** называются **равными**, если между их точками можно установить соответствие, сохраняющее расстояния.

Эта вторая формулировка равносильна первой, так как установление соответствия, сохраняющего расстояния, и означает, что произведено преобразование одной фигуры в другую, которое сохраняет расстояния, т. е. движение.

Второе определение равенства фигур соответствует тому, как на практике сравнивают предметы. Только на практике при этом никто не сопоставляет каждую точку одного предмета точкам другого. Сравнивают лишь те расстояния, которые играют определяющую роль, например длину и ширину прямоугольного стола, или длину, ширину и высоту комнаты, или диаметры круглых предметов, т. е. соответствующие размеры предметов. И сами эти предметы называют одинаковыми, когда у них соответствующие размеры одинаковые, и разными в противном случае.

Так и мы поступали, когда определяли, какие треугольники называются равными, какие прямоугольники равны, какие тетраэдры равны и т. п.: мы говорили лишь о равенстве расстояний, определяющих эти фигуры.

Для треугольников определяющими размерами являются длины его сторон. И в 7 классе мы назвали равными те треугольники, у которых соответственно равны стороны. Теперь у нас появилось *ещё одно определение равенства* треугольников, вытекающее из общего определения равенства фигур: **треугольники равны, если их можно совместить движением.** Не противоречат ли они друг другу? Равносильны ли они? Да, равносильны! И мы сейчас в этом убедимся.

★□ Ясно, что у треугольников, совмещающихся движением, соответственные стороны равны (движение сохраняет длины отрезков). Покажем, что верно и обратное утверждение: треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых соответственные стороны равны ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$), можно совместить движением.

Проведём рассуждение для треугольников, лежащих в одной плоскости (так как в противном случае можно совместить плоскость одного треугольника с плоскостью другого параллельным переносом или поворотом, сохраняющими расстояния).

Сначала выполним перенос треугольника ABC на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ и получим треугольник $A_1B_2C_2$. Если он совпал с треугольником $A_1B_1C_1$, то на этом доказательство завершается. Если это не так, то поворотом треугольника $A_1B_2C_2$ вокруг точки A_1 на угол $\varphi = \angle B_2A_1B_1$ совмещаем отрезок A_1B_2 с отрезком A_1B_1. После такого поворота либо треугольник $A_1B_2C_2$ переходит в треугольник $A_1B_1C_1$ и доказательство завершается, либо он переходит в треугольник $A_1B_1C_3$, симметричный треугольнику $A_1B_1C_1$. В последнем случае симметрия относительно прямой A_1B_1 завершает доказательство. ■★

§9. Симметрия фигур

9.1. Общее понятие о симметрии фигур. Виды симметрии фигур

Греческое слово *симметрия* означает *согласованность размеров, соразмерность*. Окружающий нас мир во многом симметричен: симметричны снежинки и кристаллы, цветы и листья, тела насекомых и животных и т. д. и т. п. (рис. 107—111).

И всё созданное человеком тоже чаще всего симметрично: архитектурные сооружения, мебель, посуда, автомобили, самолёты и т. д. Симметрию мы находим и в музыке (в мелодиях и ритмах), и в поэзии (в размерах и рифмах), и в спорте.

А в геометрии, изучая тот или иной класс фигур, рассматривают более подробно среди фигур этого класса наиболее симметричные: равнобедренные и равносторонние треугольники в классе треугольников, правильные пирамиды и правильные призмы среди пирамид и призм и т. п.

Вообще говорят, что **фигура обладает симметрией**, если существует такое (нетождественное) движение этой фигуры, при котором образом этой фигуры является она сама (иначе говоря, при котором она самосовмещается).

В соответствии с тем, каким видом является движение, самосовмещающее фигуру, говорят о центральной, осевой, поворотной, переносной, зеркальной и других симметриях фигуры.

Одна и та же фигура может обладать несколькими видами симметрии. Например, правильный треугольник обладает тремя осевыми симметриями и поворотными симметриями на 120° и на 240° (рис. 112).

Рис. 107

Рис. 108

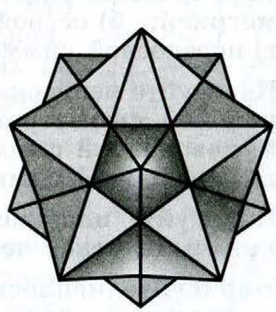


Рис. 109

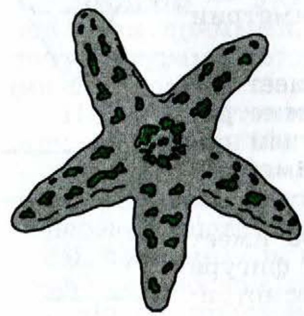


Рис. 110

Рис. 111

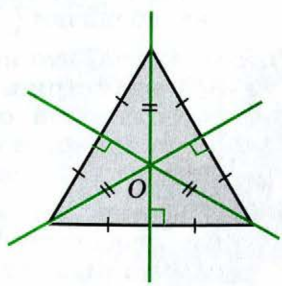


Рис. 112

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите известные вам виды симметрий.
2. Вспомните об известных вам симметричных предметах и укажите, какой симметрией они обладают.

ЗАДАЧИ

Представляем

9.1. Какой симметрией обладают фигуры, изображённые на рисунке 113?

Рисуем

9.2. Нарисуйте плоские фигуры, обладающие: а) центральной симметрией; б) осевой симметрией; в) поворотной симметрией; г) переносной симметрией.

9.3. Нарисуйте неплоские фигуры, обладающие: а) центральной симметрией; б) зеркальной симметрией; в) поворотной симметрией; г) осевой симметрией; д) переносной симметрией.

9.4. Нарисуйте плоские фигуры, обладающие симметриями не менее чем двух видов.

9.5. Нарисуйте неплоские фигуры, обладающие симметриями не менее чем двух видов.

Исследуем

9.6. Назовите известные вам симметричные архитектурные сооружения. Каким из видов симметрии они обладают?

9.7. Известно, что некоторая плоская фигура имеет две оси симметрии. Обладает ли эта фигура симметрией, отличной от осевой? Рассмотрите случаи параллельных и пересекающихся осей симметрии фигуры.

9.8. Известно, что некоторая неплоская фигура имеет две плоскости симметрии. Обладает ли эта фигура симметрией, отличной от зеркальной? Рассмотрите случаи параллельных и пересекающихся плоскостей симметрии фигуры.

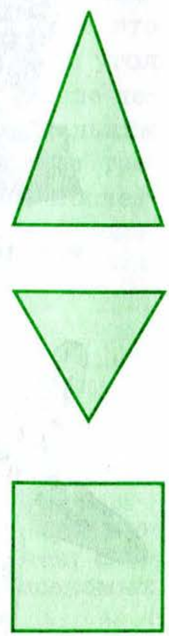


Рис. 113

▼ 9.2. Фигуры, обладающие переносной симметрией

Вы, вероятно, обратили внимание на то, что среди примеров фигур, обладающих переносной симметрией, нет ограниченных. Это не случайно. Сейчас мы докажем, что *переносной симметрией могут обладать лишь неограниченные фигуры.*

Действительно, пусть фигура M самосовмещается при параллельном переносе T на ненулевой вектор $\vec{a}$, т. е. $T(M) = M$. Возьмём любую точку A фигуры M. При переносе T она перейдёт в такую точку A_1 фигуры M, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ (рис. 114). В свою очередь, точка A_1 при переносе Tперейдёт в такую точку A_2 фигуры M, что $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$, а потому $\overrightarrow{AA_2} = 2\vec{a}$.

Повторяя эти рассуждения, убедимся, что фигуре M принадлежит бесконечная последовательность точек $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, лежащих на прямой AA_1 и таких, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$\overrightarrow{AA_n} = n\vec{a}.$$

Ясно, что расстояние AA_n равно $n|\vec{a}|$ и может быть сколь угодно велико при достаточно больших n. А потому данная фигура M должна быть неограниченной.

Примерами неограниченных фигур, обладающих переносной симметрией, являются *бордюры* (рис. 115).

Бордюр — это полоса между двумя параллельными прямыми, заполненная равными друг другу фигурами которые, получаются из одной из них при помощи параллельного переноса.

Переносной симметрией могут обладать и *паркеты* (рис. 116).

Паркет — это замощение (покрытие) плоскости равными друг другу фигурами, которые не перекрываются (рис. 117).

И бордюры, и паркеты могут обладать не только переносной, но и другими видами симметрий. Можно придумать замощения плоскости более сложными фигурами (рис. 118).

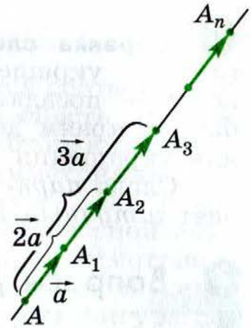


Рис. 114

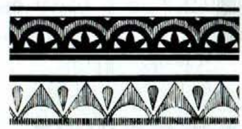


Рис. 115

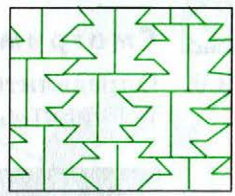


Рис. 116

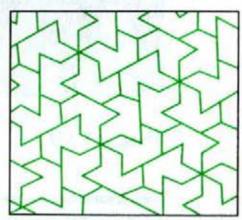


Рис. 117

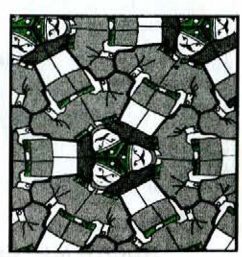


Рис. 118

Справка словесника. *Бордюр* (франц. *bordure*, от *bord* — край) — украшение по краям чего-нибудь; в декоративном садоводстве — посадка низких (бордюрных) растений по контуру клумбы, по краям дорожек или газона. Бордюры используются также для украшения зданий и комнат.

Слово *паркет* (*parquet*) в переводе с французского языка означает *штучный пол*, происходит от латинского *pars* — часть.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему не могут быть ограниченными фигуры, обладающие переносной симметрией?
2. Где в быту вы встречали паркеты и бордюры?

ЗАДАЧИ

Смотрим

9.9. Определите, какими видами симметрии обладают бордюры и паркеты, изображённые на рисунках 119—122.

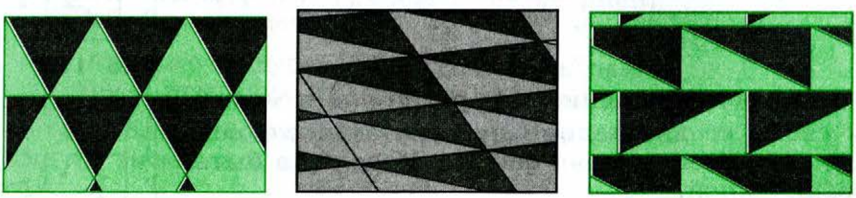


Рис. 119

Рис. 120

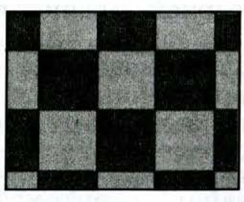


Рис. 121

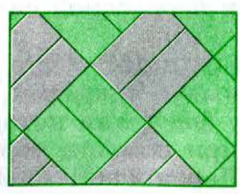


Рис. 122

Рисуем

9.10. Нарисуйте какой-нибудь бордюр, обладающий: а) только переносными симметриями; б) центральной симметрией; в) осевой симметрией. ▼

9.3. Элементы симметрии фигур

Центральная, осевая, зеркальная симметрии задаются соответственно центром, осью, плоскостью. Эти центр, ось, плоскость называются **элементами симметрии** той фигуры, которая обладает соответственно центральной, осевой, зеркальной симметриями.

Переносная симметрия задаётся вектором переноса. Его и назовём элементом симметрии фигуры, обладающей переносной симметрией. Если плоская фигура обладает поворотной симметрией, то элементом этой симметрии является пара, состоящая из центра поворота и ненулевого угла поворота, при котором фигура самосовмещается. Такие фигуры, как окружность, круг, кольцо между концентрическими окружностями и т. п. (рис. 123), имеют бесконечное множество поворотных симметрий, так как они самосовмещаются при повороте вокруг своего центра на произвольный угол.

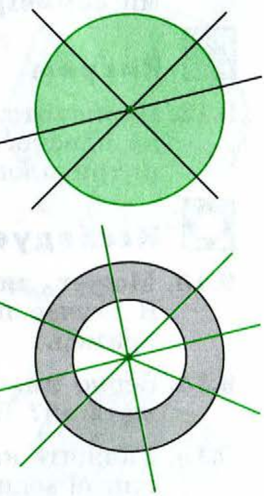


Рис. 123

Элементом поворотной симметрии фигуры в пространстве является пара, состоящая из оси симметрии и ненулевого угла поворота, при котором самосовмещается фигура. Цилиндр (рис. 124, а) и конус (рис. 124, б) обладают бесконечным множеством поворотных симметрий, так как каждая из этих фигур самосовмещается при любом повороте вокруг их оси. А сфера и ограниченный ею шар самосовмещаются при любом повороте вокруг каждой прямой, проходящей через их центр (рис. 125). Такие фигуры, которые самосовмещаются при любом повороте вокруг некоторой прямой, называются **фигурами вращения**, а эта прямая — их **осью вращения**.

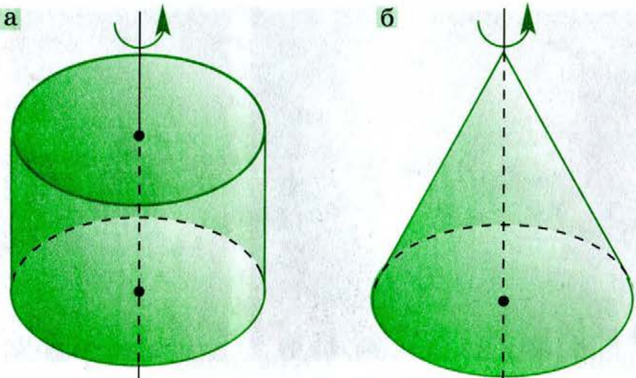


Рис. 124

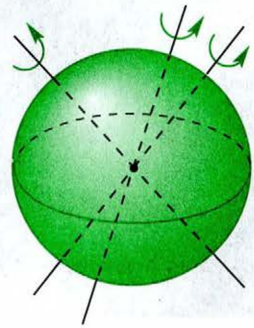


Рис. 125

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите известные вам элементы симметрии.
2. Какие фигуры называются фигурами вращения?

ЗАДАЧИ

Смотрим

9.11. На рисунке 126 изображено несколько архитектурных сооружений. Они и их детали обладают разнообразными элементами симметрии. Укажите эти элементы симметрии.

Рисуем

9.12. Нарисуйте геометрическую фигуру, имеющую: а) только одну плоскость симметрии; б) только две плоскости симметрии; в) три плоскости симметрии.

Исследуем

9.13. Может ли фигура иметь несколько центров симметрии? В случае положительного ответа приведите соответствующий пример.

9.14. Верно ли, что центр симметрии фигуры может не принадлежать ей? Если да, то нарисуйте такую фигуру.

9.15. Укажите какую-нибудь фигуру, не являющуюся окружностью или объединением концентрических окружностей и имеющую бесконечно много осей симметрии.

Рис. 126

9.4. Симметрия правильных многоугольников, правильных пирамид и призм

Правильный многоугольник определяют как многоугольник, в котором равны друг другу все стороны и равны друг другу все углы. Правильные многоугольники можно составить, прикладывая друг к другу по боковым сторонам равнобедренные треугольники (рис. 127, а). Их общая вершина O — это **центр правильного многоугольника**. Те равнобедренные треугольники, из которых составлен правильный n-угольник, имеют при вершине O угол φ_n, равный $\frac{360^\circ}{n}$.

Они получаются друг из друга при повороте вокруг точки O (в любом направлении) на угол φ_n, а также на любой кратный ему угол. Поэтому *правильный многоугольник обладает поворотной симметрией с углом поворота, равным* φ_n. Тем самым центр правильного многоугольника является центром поворотной симметрии этого многоугольника.

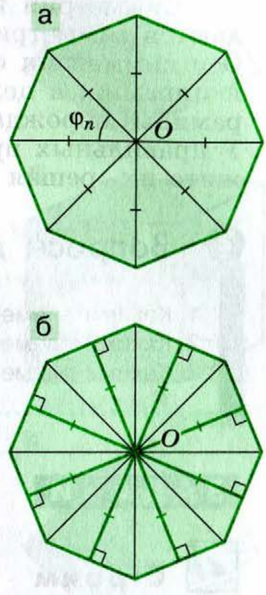


Рис. 127

Центр правильного многоугольника равноудалён от всех его вершин (см. рис. 127, а) и равноудалён от всех его сторон (рис. 127, б).

Если n чётно, то центр правильного n-угольника является его центром симметрии. Действительно, в этом случае равнобедренные треугольники, из которых составлен многоугольник, распадаются на пары симметричных относительно центра треугольников. Поэтому и весь многоугольник обладает центральной симметрией. (Отметим, что в этом случае многоугольник имеет попарно параллельные стороны — основания попарно центрально симметричных треугольников.)

Если n нечётно, то центра симметрии у n-угольника нет (объясните почему).

Правильный n-угольник имеет n осей симметрии, проходящих через его центр.

Если n чётно, то оси симметрии правильного многоугольника содержат противоположные вершины или проходят через середины параллельных сторон (рис. 128, а). Если же n нечётно, то осями симметрии правильного многоугольника являются прямые, каждая из которых проходит через вершину многоугольника перпендикулярно противо-

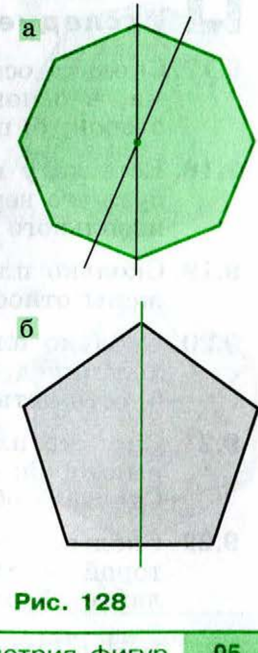


Рис. 128

лежащей ей стороне (рис. 128, б). Докажите эти утверждения, например, для правильных пятиугольника и шестиугольника.

Симметрии правильных пирамид и правильных призм порождаются симметрией их оснований — правильных многоугольников. Оси симметрии оснований порождают плоскости симметрии призм и пирамид, а центр поворотной симметрии основания призмы (пирамиды) порождает ось поворотной симметрии призмы (пирамиды). У правильных призм есть ещё и другие элементы симметрии. Укажите их, решая задачи к этому пункту.

Вопросы для самоконтроля

1. Какими элементами симметрии обладают правильные многоугольники?
2. Какими элементами симметрии обладают правильные призмы?
3. Какими элементами симметрии обладают правильные пирамиды?

ЗАДАЧИ

Строим

9.16. Используя осевую и центральную симметрии, постройте правильный: а) шестиугольник; б) восьмиугольник.

Исследуем

9.17. Сколько осей поворотной симметрии имеет правильная призма, в основании которой многоугольник, имеющий: а) пять сторон; б) шесть сторон? Сделайте общий вывод.

9.18. Есть ли у куба плоскость симметрии, содержащая какую-нибудь его вершину? Есть ли такая плоскость симметрии у произвольного прямоугольного параллелепипеда?

9.19. Сколько плоскостей симметрии имеет куб? Как они расположены относительно рёбер куба?

9.20. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, в котором: а) есть ровно две квадратные грани; б) есть четыре квадратные грани; в) нет квадратных граней?

9.21. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная пирамида, в которой: а) четыре боковые грани; б) пять боковых граней? Сделайте общий вывод.

9.22. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная призма, в которой: а) три боковые грани; б) шесть боковых граней? Сделайте общий вывод. Сравните результаты задач 9.21 и 9.22.

9.5. Правильные многогранники

По аналогии с правильными плоскими фигурами — многоугольниками — в пространстве определяют правильные многогранники: **многогранник** называется **правильным**, если все его грани — равные друг другу правильные многоугольники, а все его двугранные углы равны между собой.

Мы знаем, что существует правильный многоугольник с любым количеством сторон, т. е. число видов правильных многоугольников бесконечно. Однако для правильных многогранников это не так.

Ещё Евклид доказал в XIII книге своих «начал» в последнем предложении, что существует всего пять видов правильных многогранников. Предложение, которым он завершает свои «Начала», звучит так: *«Вот я утверждаю, что кроме упомянутых пяти тел нельзя построить другого тела, заключённого между равносторонними и равноугольными равными друг другу многоугольниками».*

Перечислим правильные многогранники:

— правильные тетраэдры (четырёхгранники), у которых грани — правильные треугольники (рис. 129, а);

— кубы (правильные гексаэдры, шестигранники), у которых грани — квадраты (рис. 129, б);

— правильные октаэдры (восьмигранники), у которых грани — правильные треугольники (рис. 129, в);

— правильные додекаэдры (двенадцатигранники), у которых грани – правильные пятиугольники (рис. 129, г);

— правильные икосаэдры (двадцатигранники), у которых грани — правильные треугольники (рис. 129, д).

Интересно, что центры граней каждого правильного многогранника являются вершинами другого правильного многогранника. Так, например, отметив центры граней куба, мы можем получить правильный октаэдр (рис. 130, а), и наоборот (рис. 130, б). Далее, центры граней правильного додекаэдра являются вершинами правильного икосаэдра, и наоборот (рис. 130, в, г). А центры граней правильного тетраэдра являют-

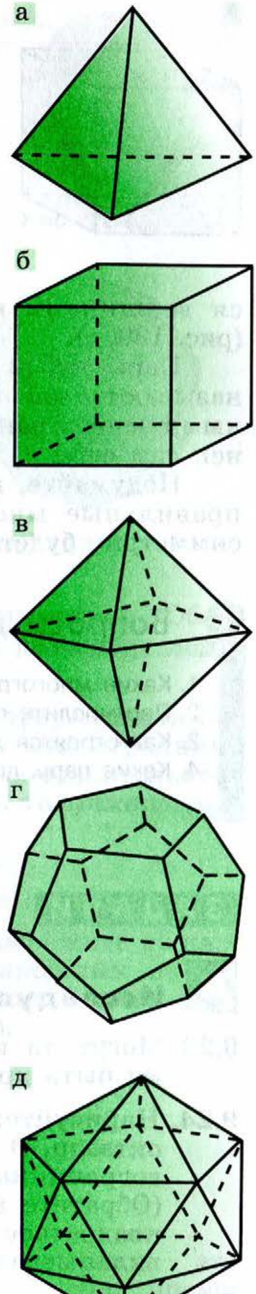
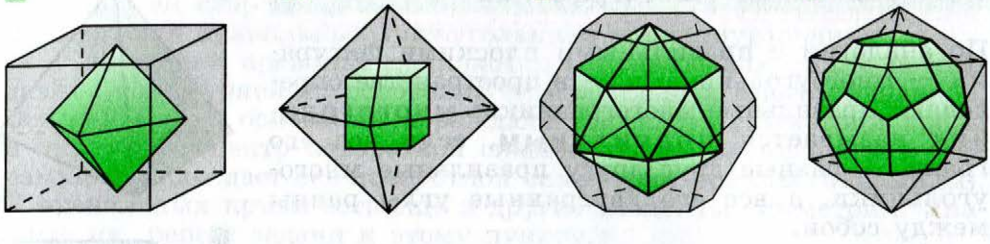


Рис. 129

а б в г



ся вершинами нового правильного тетраэдра (рис. 130, д).

д

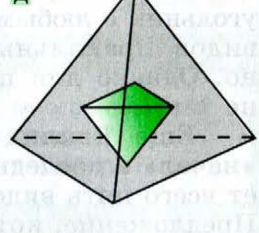


Рис. 130

Пары куб и октаэдр, додекаэдр и икосаэдр называют *двойственными* друг другу правильными многогранниками. А тетраэдр двойственен сам себе.

Подумайте, какими симметриями обладают правильные многогранники. Подробно об их симметрии будет рассказано в старших классах.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие многогранники называются правильными?
2. Перечислите правильные многогранники.
3. Как строятся двойственные друг другу правильные многогранники?
4. Какие пары двойственных многогранников вы можете назвать?

ЗАДАЧИ

Исследуем

9.23. Могут ли изображённые на рисунках 131—134 многогранники быть правильными многогранниками?

9.24. Нарисуйте: а) правильный тетраэдр; б) куб; в) правильный октаэдр. В каждом случае нарисуйте различные сечения многогранника, являющиеся правильными многоугольниками. (Обратите внимание на то, что у правильного тетраэдра есть квадратное сечение. Где оно?) Есть ли среди сечений куба правильные пятиугольник и шестиугольник?

9.25. От правильного тетраэдра отрезали четыре равных правильных тетраэдра. Нарисуйте различные варианты многогранников, которые могли при этом получиться. Имеет ли получив-

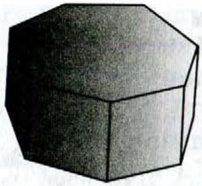


Рис. 131

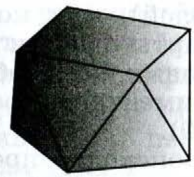


Рис. 132

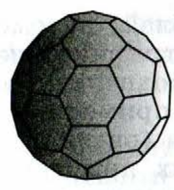


Рис. 133

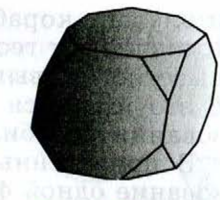


Рис. 134

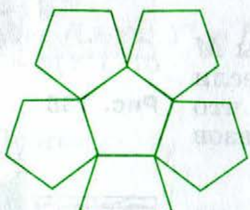


Рис. 135

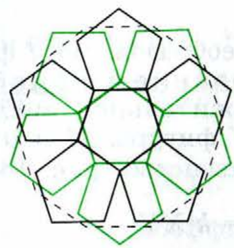


Рис. 136

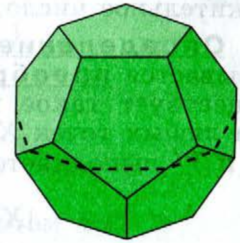


Рис. 137

шийся многогранник центр, оси, плоскости симметрии? Обладает ли он поворотной симметрией? Сделайте развёртку получившегося многогранника и склейте его.

9.26. От куба отрезали восемь равных правильных треугольных пирамид. Сколько граней имеет получившийся многогранник? Имеет ли он элементы симметрии? В случае положительного ответа перечислите их. Сделайте развёртку получившегося многогранника и склейте его.

Делаем

9.27. Сделайте развёртку правильного додекаэдра: вырежите из картона два одинаковых многоугольника, изображённых на рисунке 135, положите их друг на друга так, как показано на рисунке 136, и соедините резинкой (рис. 137).

§ 10. Подобие

10.1. Преобразование подобия и его простейшие свойства

Второй важный класс преобразований, который мы изучим, — это преобразования подобия. Реальное преобразование подобия происходит каждый раз, когда печатают фотографию с негатива с тем или иным увеличением, или когда кадры киноплёнки проектируются на экран, или когда создают модели реальных предметов (самолётов, кораблей, автомобилей), или когда изготавливают географические карты одной и той же местности, выполненные в разных масштабах. Всё это является примерами применения преобразования подобия (рис. 138, 139).

В приведённых примерах происходит преобразование одной фигуры в другую (подобную первой), при котором все расстояния между точками первой фигуры умножаются на одно и то же положительное число.

Рис. 138

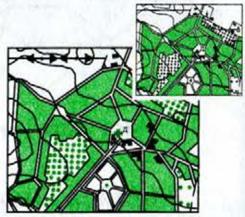


Рис. 139

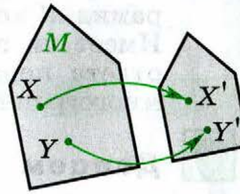
Определение. Преобразование f фигуры M называется **преобразованием подобия**, если существует такое положительное число k, что для любых точек X и Y фигуры M и их образов X' и Y' выполняется равенство (рис. 140)

$$|X'Y'| = k|XY|. \qquad (1)$$

Число k называется при этом **коэффициентом подобия**.

Из данного определения следует, что, во-первых, *движение является частным случаем подобия* (при $k = 1$) и, во-вторых, *подобие является взаимно однозначным преобразованием.*

□ Действительно, если точки X и Y различны, то $|XY| > 0$. Так как $k > 0$, то из равенства (1) следует, что $|X'Y'| > 0$, т. е. точки $X' = f(X)$ и $Y' = f(Y)$ тоже различны. ■



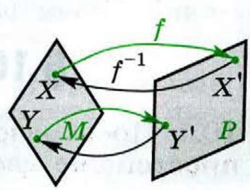
$|X'Y'| = k|XY|$

Рис. 140

Из взаимной однозначности подобия следует его обратимость. При этом *если подобие f с коэффициентом k переводит фигуру M в фигуру P, то обратное ему преобразование f^{-1} фигуры P в фигуру M тоже является подобием, коэффициент которого равен $\frac{1}{k}$* (рис. 141).

□ Действительно, при преобразовании f^{-1} фигуры P её точкам $X' = f(X)$ и $Y' = f(Y)$ сопоставляются точки $X = f^{-1}(X')$ и $Y = f^{-1}(Y')$, и из равенства (1) следует, что

$$|XY| = \frac{1}{k}|X'Y'|. \ ■ \qquad (2)$$



$|X'Y'| = k|XY|$

$|XY| = \frac{1}{k}|X'Y'|$

Рис. 141

Наконец, отметим, что *композиция подобий с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$.*

◻ Действительно, пусть подобие f с коэффициентом k_1 переводит фигуру M в фигуру $P = f(M)$, а затем подобие g с коэффициентом k_2 переводит фигуру P в фигуру $g(P)$ (рис. 142).

Тогда их композиция $g \circ f$ переводит фигуру M в фигуру $g(P)$. Если X и Y — произвольные точки фигуры M, то

$$|X'Y'| = k_1|XY|, \quad (3)$$

где $X' = f(X)$ и $Y' = f(Y)$. Далее, если $X'' = g(X')$ и $Y'' = g(Y')$, то

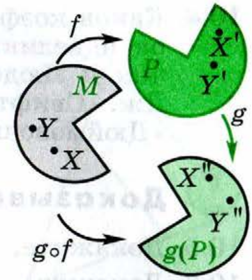


Рис. 142

$$|X''Y''| = k_2|X'Y'|. \quad (4)$$

Поэтому

$$|X''Y''| = k_1k_2|XY|. \quad (5)$$

Итак, $g \circ f$ является подобием с коэффициентом k_1k_2. ■

Говорят, что **фигура P подобна фигуре M с коэффициентом подобия k**, если существует такое преобразование подобия фигуры M с коэффициентом k, которое переводит фигуру M в фигуру P. Символически подобие фигур P и M записывают так: $P \sim M$.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём заключается подобное преобразование фигуры?
2. Какие фигуры называются подобными?
3. Что такое коэффициент подобия?
4. Почему преобразование подобия обратимо? Чем является преобразование, обратное преобразованию подобия с коэффициентом k?
5. Чем является композиция двух преобразований подобия?
6. Может ли подобие быть движением?

ЗАДАЧИ

Представляем

10.1. Приведите примеры подобных фигур.

10.2. Придумайте признаки подобия: а) прямоугольников; б) ромбов; в) параллелограммов; г) прямоугольных параллелепипедов.

10.3. Модели кораблей, макеты зданий (в музеях) имеют обычно длину или высоту, равную примерно 1 м. Как вы думаете, с каким коэффициентом подобия изготавливаются такие модели?

10.4. Каков коэффициент подобия Гулливера и лилипута? Гулливера и великана? Дюймовочки и её матери? Мальчика-с-пальчик и Людоеда? (Дайте ответы на вопросы, прочитав сказки Дж. Свифта «Путешествия Гулливера», Г. Х. Андерсена «Дюймовочка», братьев Гримм «Мальчик-с-пальчик».)

Доказываем

10.5. Докажите, что любые две окружности подобны.

10.6. Докажите, что любые два круга подобны.

Применяем геометрию

10.7. Как по плану местности (или по карте) определить расстояние между двумя объектами?

10.2. Гомотетия

Важнейшим из преобразований подобия является гомотетия. Напомним, что гомотетией с центром в точке O и ненулевым коэффициентом k называется такое преобразование, которое каждой точке X сопоставляет такую точку X', что выполняется равенство

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}. \qquad (6)$$

Для теории значение гомотетии состоит в том, что, как мы покажем, любое подобие является композицией гомотетии и движения. Поэтому, изучив свойства гомотетии и зная свойства движений, мы, сопоставив их, найдём свойства подобия.

Рассмотрим важнейшие свойства гомотетии.

СВОЙСТВО 1 **При гомотетии с коэффициентом k каждый вектор умножается на k.**

Подробнее: если точки X и Y при гомотетии с коэффициентом k перешли в точки X' и Y', то

$$\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY}. \qquad (7)$$

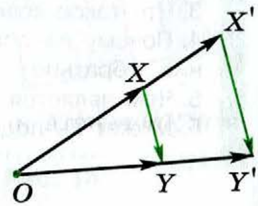


Рис. 143

Доказательство. Пусть точка O — центр гомотетии. Тогда $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY'} = k\overrightarrow{OY}$ (рис. 143).

Поэтому $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OY} - k\overrightarrow{OX} = k(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = k\overrightarrow{XY}$. ■

Из равенства (7) следует равенство

$$|X'Y'| = |k||XY|, \qquad (8)$$

т. е. *гомотетия с коэффициентом k является подобием с коэффициентом $|k|$.*

Замечание. Доказав свойство 1, мы пока лишь установили, что гомотетией упорядоченная пара точек $(X; Y)$ переводится в такую упорядоченную пару точек $(X'; Y')$, что $\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY}$. А то, что каждая внутренняя точка отрезка XY перейдёт при гомотетии во внутреннюю точку отрезка $X'Y'$, мы установим, доказав свойство 2.

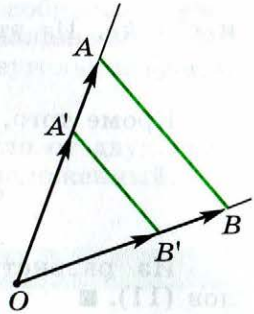


Рис. 144

СВОЙСТВО 2 **Гомотетия каждый отрезок переводит в отрезок; гомотетичные отрезки параллельны или лежат на одной прямой** (рис. 144).

Доказательство. Покажем, что если точки A и B переходят при гомотетии соответственно в точки A' и B', то любая внутренняя точка отрезка AB перейдёт в некоторую точку отрезка $A'B'$ и, наоборот, любая точка отрезка $A'B'$ является образом некоторой точки отрезка AB.

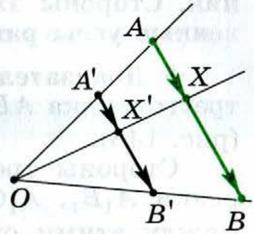


Рис. 145

Точка X лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда найдётся такое число t из промежутка $[0; 1]$, что

$$\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}. \qquad (9)$$

При этом, когда число t возрастает от 0 до 1, точка X пробегает отрезок AB от A до B (рис. 145).

Умножим обе части равенства (9) на число k, получим

$$k\overrightarrow{AX} = t(k\overrightarrow{AB}). \qquad (10)$$

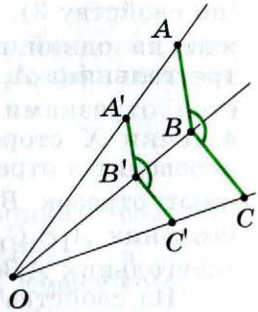


Рис. 146

По свойству 1 $\overrightarrow{A'X'} = k\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Из этих равенств и равенства (10) следует, что $\overrightarrow{A'X'} = t\overrightarrow{A'B'}$. А это означает, что точка X' пробегает отрезок $A'B'$ от A' до B', когда параметр t возрастает от 0 до 1. ■

СВОЙСТВО 3 **Гомотетия сохраняет величину угла.**

Скажем об этом подробнее: для любых точек A, B, C и их образов A', B', C' при гомотетии (рис. 146) выполняется равенство

$$\angle ABC = \angle A'B'C'. \qquad (11)$$

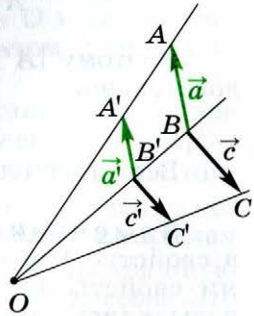


Рис. 147

Доказательство. Положим $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{a'} = \overrightarrow{B'A'}$, $\vec{c'} = \overrightarrow{B'C'}$ (рис. 147). Тогда $\angle ABC = \angle \vec{a}\,\vec{c}$, $\angle A'B'C' = \angle \vec{a'}\vec{c'}$. По свойству 1 $\vec{a'} = k\vec{a}$

и $\vec{c}\,' = k\vec{c}$. Из этих двух равенств следует, что $|\vec{a}\,'| = |k||\vec{a}|$ и $|\vec{c}\,'| = |k||\vec{c}|$.

Кроме того, $\vec{a}\,'\cdot\vec{c}\,' = (k\vec{a})\cdot(k\vec{c}) = k^2(\vec{a}\cdot\vec{c})$. Но тогда

$$\cos\angle\vec{a}\,'\vec{c}\,' = \frac{\vec{a}\,'\vec{c}\,'}{|\vec{a}\,'||\vec{c}\,'|} = \frac{k^2(\vec{a}\cdot\vec{c})}{k^2|\vec{a}||\vec{c}|} = \cos\angle\vec{a}\,\vec{c}. \qquad (12)$$

Из равенства (12) косинусов углов следует равенство углов (11). ■

СВОЙСТВО 4 **Гомотетия каждый треугольник переводит в треугольник. Стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.**

★ **Доказательство.** Пусть гомотетия вершины треугольника ABC переводит в точки A_1, B_1 и C_1 (рис. 148).

Стороны треугольника ABC перейдут в отрезки A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 (по свойству 2). Углы между этими отрезками A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равны углам треугольника ABC (по свойству 3), поэтому точки A_1, B_1 и C_1 не лежат на одной прямой и являются вершинами треугольника $A_1B_1C_1$. Треугольник ABC заполняется отрезками AX, идущими из вершины A в точки X стороны BC. Эти отрезки гомотетия переводит в отрезки A_1X_1, концы которых заполняют отрезок B_1C_1 (по свойству 2). Отрезки A_1X_1 заполняют треугольник $A_1B_1C_1$, т. е. в этот треугольник перейдёт при гомотетии треугольник ABC.

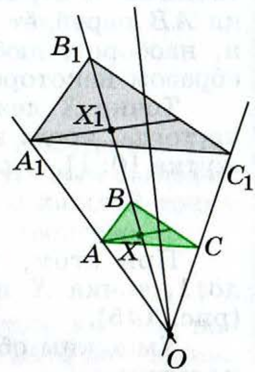


Рис. 148

Из свойства 1 следует, что

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}. \qquad (13)$$

Поэтому $|A'B'| = |k||AB|$, $|A'C'| = |k||AC|$ и $|B'C'| = |k||BC|$. Следовательно,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = |k|. \qquad (14)$$

Все утверждения свойства 4 доказаны. ■ ★

Замечание. Поскольку гомотетия является подобием, то в свойстве 4 речь идёт о свойствах подобных треугольников. Этими свойствами определялось подобие треугольников: подобными назывались треугольники, у которых стороны пропорциональны (а равенство углов затем доказывалось), или же подобными назывались треугольники, у которых стороны пропорциональны, а соответственные углы равны. О признаках подобия треугольников мы скажем в п. 10.4.

Справка словесника. Слово *гомотетия* произошло от двух греческих слов: *homos* — одинаковый и *thetos* — расположенный.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры гомотетичных фигур.
2. Из чего следует, что гомотетия является подобием?
3. Какие свойства гомотетии вам известны?
4. Откуда следует, что гомотетия каждую прямую переводит в параллельную ей прямую или совпадающую с ней прямую?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

10.8. Напишите формулы, которые на координатной плоскости (в координатном пространстве) задают гомотетию с коэффициентом k и с центром в начале координат.

Разбираемся в решении

10.9. Докажите, что любые два неравных треугольника с соответственно параллельными сторонами гомотетичны.

Решение. Пусть два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ имеют соответственно параллельные стороны: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$ (рис. 149). Мы хотим доказать гомотетичность этих треугольников. Это значит: нужно доказать, что найдутся такая точка O и такое число k, что при гомотетии с центром O и коэффициентом k треугольник ABC отобразится в треугольник $A_1B_1C_1$.

Так как треугольники не равны, то не равны какие-нибудь две их соответственные стороны. Пусть, например, не равны AB и A_1B_1. Тогда прямые AA_1 и BB_1 пересекаются. (Почему?) Обозначим точку их пересечения буквой O (рис. 150) и рассмотрим гомотетию, которая переводит точку A в точку A_1. При этой гомотетии прямая AB отобразится в прямую, параллельную прямой AB и проходящую через точку A_1, т. е. в прямую A_1B_1, а прямая OB — в себя. Это значит, что точка B как точка пересечения прямых AB и OB пе-

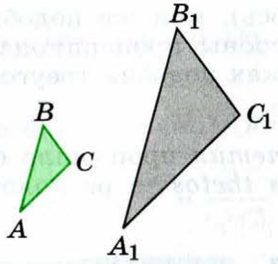


Рис. 149

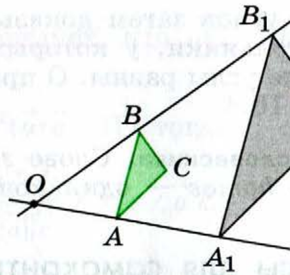


Рис. 150

реходит в точку B_1, являющуюся точкой пересечения прямых A_1B_1 и OB. Совершенно аналогично прямые BC и AC переходят соответственно в прямые B_1C_1 и A_1C_1 (так как $BC \parallel B_1C_1$ и $AC \parallel A_1C_1$), а потому точка C переходит в точку C_1 (объясните подробнее почему).

Таким образом, при рассмотренной гомотетии треугольник ABC отобразится в треугольник $A_1B_1C_1$. Ясно, что модуль коэффициента этой гомотетии равен отношению соответствующих сторон треугольников. ■

Заметим, что, решая эту задачу, мы доказали

ПРИЗНАК *подобия треугольников.* **Если стороны неравных треугольников соответственно параллельны, то эти треугольники подобны.**

10.10. Докажите, что все графики функций вида $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ гомотетичны.

★ **Решение.** Задача будет решена, если мы покажем, что график F_a функции $y = ax^2$ гомотетичен графику F функции $y = x^2$ (рис. 151). Проведём через начало координат O прямую p, заданную уравнением $y = kx$, $k \neq 0$. Прямая p пересечёт графики F и F_a в начале координат, а также в точках $X = (k; k^2)$ и $X_a = \left(\frac{k}{a}; \frac{k^2}{a}\right)$.

И теперь становится ясно, что вектор $\overrightarrow{OX} = a\overrightarrow{OX_a}$, т. е. точка X является образом точки X_a при гомотетии с центром O и коэффициентом a. А потому и параболу F_a эта гомотетия переводит в параболу F, т. е. эти параболы гомотетичны. ■ ★

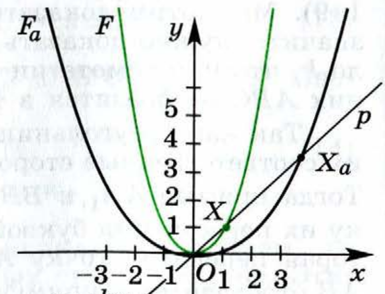


Рис. 151

Доказываем

10.11. Докажите, что композиция двух гомотетий с общим центром является гомотетией. Чему равен её коэффициент?

10.12. Докажите, используя гомотетию, теорему о средней линии треугольника.

Исследуем

10.13. Сколько центров гомотетии могут иметь два параллельных отрезка?

10.14. Какие две прямые гомотетичны? Где может лежать их центр гомотетии? Каким может быть коэффициент гомотетии?

10.15. Какие две плоскости гомотетичны? Где может лежать их центр гомотетии? Каким может быть коэффициент гомотетии?

10.16. Может ли какое-нибудь движение быть частным случаем гомотетии?

10.17. Верно ли, что гомотетичны любые два: а) многоугольника с соответственно параллельными сторонами; б) прямоугольных параллелепипеда с соответственно параллельными рёбрами?

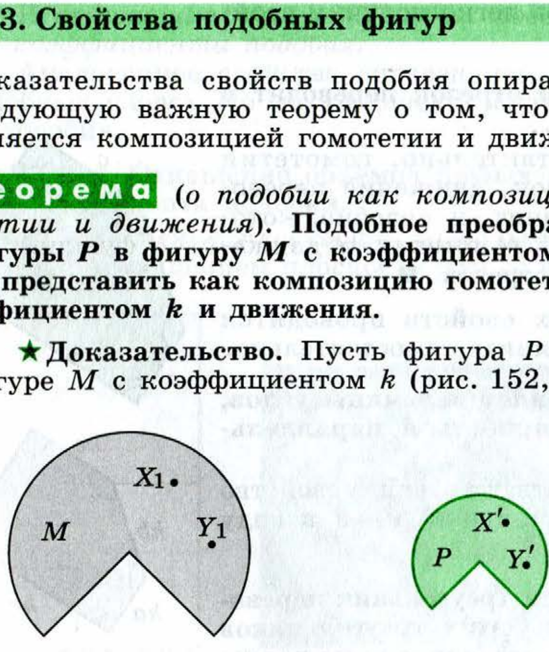
10.3. Свойства подобных фигур

Доказательства свойств подобия опираются на следующую важную теорему о том, что подобие является композицией гомотетии и движения.

Теорема (*о подобии как композиции гомотетии и движения*). **Подобное преобразование фигуры P в фигуру M с коэффициентом k можно представить как композицию гомотетии с коэффициентом k и движения.**

★**Доказательство.** Пусть фигура P подобна фигуре M с коэффициентом k (рис. 152, а).

а



б

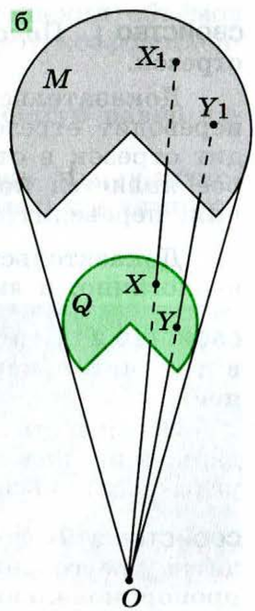


Рис. 152

Выберем произвольную точку O и гомотетией f с центром в точке O и коэффициентом k переведём фигуру M в фигуру Q (рис. 152, б).

Покажем, что фигура Q равна фигуре P. Возьмём две любые точки X и Y фигуры Q. Они являются образами при гомотетии некоторых точек X_1 и Y_1 фигуры M, причём выполняется равенство

$$|XY| = k|X_1Y_1|. \qquad (15)$$

Точкам X_1 и Y_1 фигуры M сопоставляются при подобии точки X' и Y' фигуры P, причём выполняется равенство

$$|X'Y'| = k|X_1Y_1|. \qquad (16)$$

Из равенств (15) и (16) следует, что $|X'Y'| = |XY|$, т. е. фигуры P и Q равны. Следовательно, фигура Q переводится в фигуру P некоторым движением g. Таким образом, подобие фигур M и P можно осуществить, выполняя сначала гомотетию f (которая переведёт M в Q), а затем движение g (которое переведёт Q в P). ■ ☆

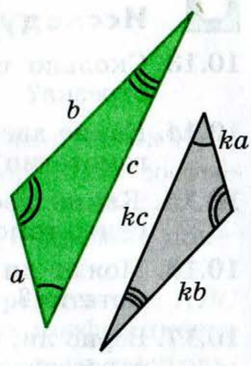


Рис. 153

Доказав эту теорему и зная свойства движений и гомотетий, мы теперь легко получим свойства подобных фигур.

СВОЙСТВО 1 **Подобие любой отрезок переводит в отрезок.**

Доказательство. Действительно, гомотетия переводит отрезок в отрезок, движение переводит отрезок в отрезок, значит, и подобие, которое является композицией гомотетии и движения, переводит отрезок в отрезок. ■

Доказательства других свойств проводятся аналогично, и вы их выполните самостоятельно.

СВОЙСТВО 2 **Подобие сохраняет величины углов, в том числе перпендикулярность и параллельность.**

Это свойство, как и соответствующее свойство движений, надо понимать широко, имея в виду углы различных типов.

СВОЙСТВО 3 **Подобие каждый треугольник переводит в треугольник. Стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны** (рис. 153).

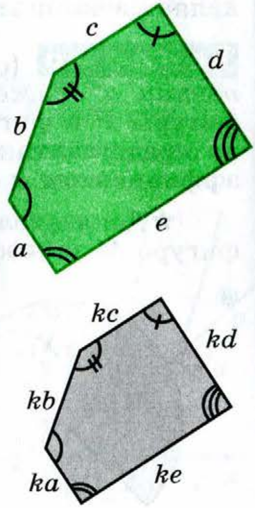
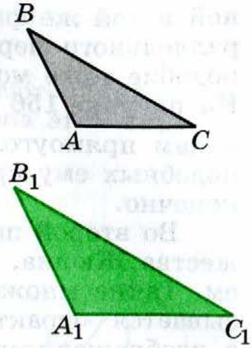


Рис. 154

Многоугольники составлены из треугольников. Поэтому из свойства 3 следует, что *подобие каждый многоугольник переводит в многоугольник; стороны этих многоугольников пропорциональны, а соответственные углы равны* (рис. 154).



$$S_1(\triangle A_1B_1C_1) = S(\triangle ABC)\cdot\left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 = S(\triangle ABC)\cdot k^2$$

Рис. 155

СВОЙСТВО 4 **При подобии с коэффициентом k площадь многоугольной фигуры умножается на k^2.**

Доказательство. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведённую к ней высоту. При подобии высота треугольника переходит в высоту его образа. При подобии с коэффициентом k и сторона, и высота умножаются на k. Поэтому площадь треугольника умножается на k^2 (рис. 155).

Многоугольная фигура составлена из треугольников, значит, площадь такой фигуры равна сумме площадей составляющих её треугольников. Так как при подобии площадь каждого треугольника умножается на k^2, то и вся сумма умножается на k^2. Следовательно, площадь многоугольника при подобии умножается на k^2. ■

И *отношение площадей любых подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.*

Аналогичное свойство справедливо и для отношения объёмов подобных фигур. Но это отношение будет равно кубу коэффициента подобия.

СВОЙСТВО 5 **Отношение объёмов любых подобных фигур равно кубу коэффициента подобия.**

▲ *Заполнение плоскости подобными фигурами.* Мы познакомились с замощением плоскости или её части (полосы) копиями од-

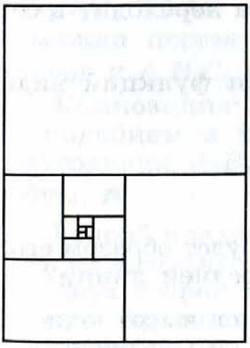


Рис. 156

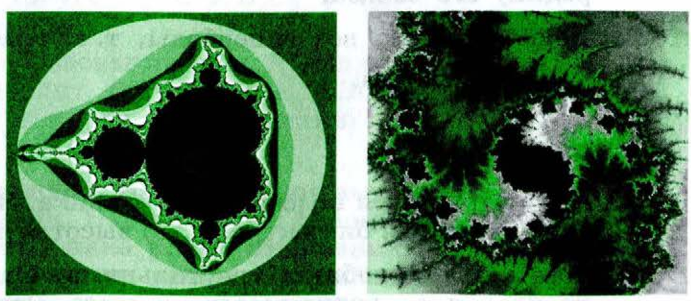


Рис. 157

ной и той же фигуры с помощью различных видов движений: параллельного переноса, поворота, осевой симметрии. Оказывается, подобие тоже может быть использовано для замощения плоскости. На рисунке 156 приведён пример такого замощения: разбивая пополам прямоугольник с отношением сторон $\sqrt{2}$, мы получаем два подобных ему прямоугольника. Этот процесс можно повторять бесконечно.

Во второй половине XX в. были открыты так называемые множества Жюлиа, удивительные свойства которых связаны с подобием. Такие множества изучают в разделе математики, который называется «фрактальная геометрия». Издаются красочные альбомы с изображениями разнообразных множеств Жюлиа. Два примера таких множеств приведены на рисунке 157. ▼

Вопросы для самоконтроля

1. Композицией каких преобразований является подобие?
2. Какие свойства подобных фигур вам известны?

ЗАДАЧИ

Доказываем

10.18. Докажите, что любые два отрезка подобны. Чему равен коэффициент их подобия?

10.19. Докажите, что подобны любые два: а) квадрата; б) равносторонних треугольника; в) куба.

10.20. Докажите, что при подобии середина отрезка переходит в середину его образа.

10.21. Докажите, что все гиперболы, т. е. графики функций вида $y = \frac{a}{x}$, подобны.

Исследуем

10.22. Рассматривается подобие треугольника. Что будет образом его: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) средней линии?

10.23. Даны два подобных треугольника. Одна из высот одного треугольника равна высоте другого. Равны ли эти треугольники?

Применяем геометрию

10.24. Чугунные гири весом 1 кг, 2 кг и 5 кг имеют одинаковую форму. Каковы отношения линейных размеров этих гирь?

10.4. Признаки подобия треугольников

У подобных треугольников: 1) стороны пропорциональны и 2) соответственные углы равны (см. свойство 3 п. 10.3). Оба эти свойства являются характеристическими свойствами подобных треугольников. Это значит, что справедливы следующие два *признака подобия треугольников*.

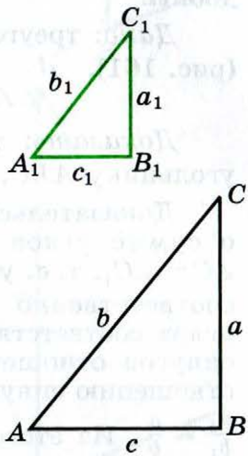


Рис. 158

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК *подобия треугольников*. **Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

Дано: стороны a_1, b_1, c_1 треугольника $A_1B_1C_1$ пропорциональны сторонам a, b, c треугольника ABC (рис. 158), т. е. одни выражаются через другие умножением на некоторый положительный множитель k:

$$a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc. \qquad (17)$$

Доказать: треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC.

Доказательство. Гомотетией g с центром A и коэффициентом k переведём треугольник ABC в треугольник AB_2C_2. Стороны треугольника AB_2C_2 соответственно равны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, треугольники AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$ равны. Поэтому некоторым движением h можно перевести треугольник AB_2C_2 в треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 159).

Композиция преобразований g и h является подобием и переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, т. е. эти треугольники подобны. ■

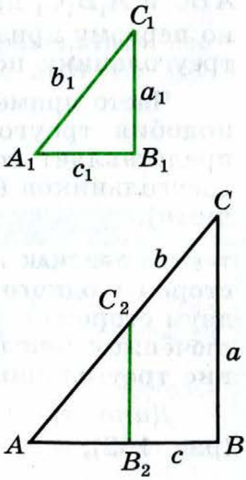


Рис. 159

Второй признак подобия треугольников вытекает из *теоремы синусов*. Напомним её: **отношение двух сторон треугольника равно отношению синусов противолежащих им углов.** Напомним также, что *синус тупого угла* определяется как синус смежного с ним острого угла.

Доказательство. теоремы синусов очень простое. Если в треугольнике ABC провести высоту CH, то $CH = a\sin B$ и $CH = b\sin A$ (рис. 160).

Поэтому $a\sin B = b\sin A$ и $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$. ■

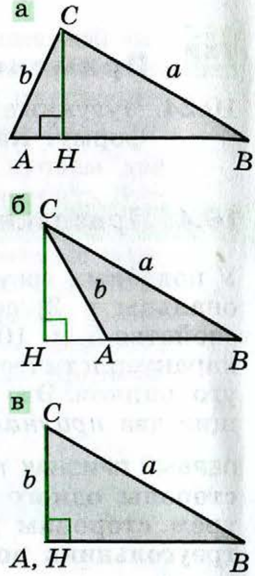


Рис. 160

ВТОРОЙ ПРИЗНАК *подобия треугольников.* **Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

Дано: треугольник ABC, треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 161),

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1. \tag{18}$$

Доказать: треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC.

Доказательство. Из равенств (18) и теоремы о сумме углов треугольника вытекает, что и $\angle C = \angle C_1$, т. е. углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны. Поэтому и синусы этих углов соответственно равны. Так как по теореме синусов отношение сторон треугольников равно отношению синусов противолежащих им углов, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$. Из этого равенства следует, что $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$.

Рассуждая аналогично, получаем, что $\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$. Поэтому $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$, т. е. стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны. А тогда, согласно первому признаку подобия треугольников, эти треугольники подобны. ■

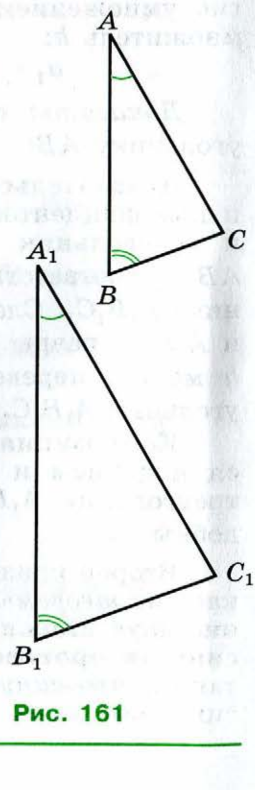


Рис. 161

Часто применяется ещё один, третий признак подобия треугольников. В частном случае он представляет собой первый признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК *подобия треугольников.* **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.**

Дано: треугольник ABC, треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 162), $\angle A = \angle A_1$,

$$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}. \tag{19}$$

Доказать: треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC.

Доказательство. Докажем пропорциональность сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC. Если отношения в равенстве (19) обозначить через k, то получим

$$b_1 = kb, \ c_1 = kc. \tag{20}$$

Тогда по теореме косинусов, используя равенства (20) и равенство углов A и A_1, получаем

$$a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos A_1 = \\ = k^2(b^2 + c^2 - 2bc\cos A) = k^2a^2. \tag{21}$$

Извлекая квадратный корень в равенстве (21) и учитывая положительность величин a, a_1, k, получаем, что $a_1 = ka$. Вместе с равенствами (20) равенство $a_1 = ka$ означает пропорциональность сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Из первого признака подобия треугольников вытекает, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. ■

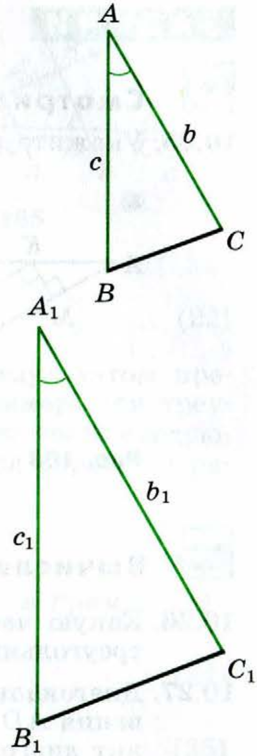


Рис. 162

Замечание. Второй и третий признаки подобия треугольников с помощью теорем синусов и косинусов были сведены к первому признаку — пропорциональности сторон треугольников. Результаты пп. 10.3 и 10.4 показывают, что подобие треугольников можно определять тремя равносильными способами: 1) пропорциональностью сторон; 2) пропорциональностью сторон и равенством соответственных углов; 3) как фигуры, получающиеся друг из друга преобразованием подобия.

Первый из этих способов самый простой.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите признаки подобия треугольников.
2. Сравните признаки подобия треугольников и признаки равенства треугольников. Каждый ли из признаков подобия в частном случае является признаком равенства?
3. Сформулируйте и докажите признаки подобия прямоугольных треугольников.
4. Сформулируйте и докажите признаки подобия равнобедренных треугольников.

ЗАДАЧИ

Смотрим

10.25. Укажите подобные треугольники на рисунке 163.

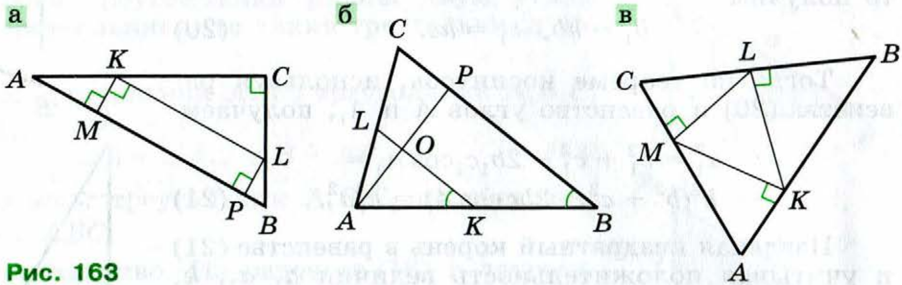


Рис. 163

Вычисляем

10.26. Какую часть от площади треугольника составляет площадь треугольника, ограниченного его средними линиями?

10.27. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Её основания AD и BC относятся как $3:1$. а) В каком отношении делит диагонали точка O? б) Каково отношение площадей треугольников OAD и OBC? в) Какую часть площади всей трапеции составляет площадь треугольника OBC?

Доказываем

10.28. а) В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AK и BM. Докажите, что треугольники AKC и BMC подобны. б) Решите ту же задачу, что и в пункте а), для тупоугольного треугольника.

10.29. Прямая a пересекает две стороны треугольника и параллельна третьей его стороне. Докажите, что прямая a рассекает стороны этого треугольника на пропорциональные отрезки и отсекает подобный ему треугольник.

Разбираемся в решении

10.30. Докажите, что параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.

Решение. □ Пусть стороны угла O — лучи p и q — пересекают параллельные прямые a, b, c соответственно в точках A, A', B, B', C, C' (рис. 164). Требуется доказать, что

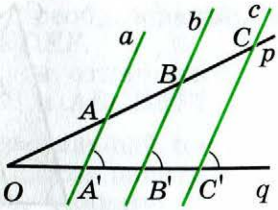


Рис. 164

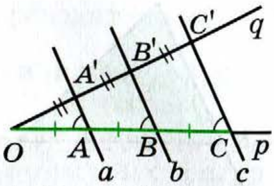


Рис. 165

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}. \qquad (22)$$

Для доказательства равенств (22) воспользуемся результатом предыдущей задачи 10.32. Согласно этой задаче, например, для треугольника OBB' и прямой AA' на рисунке 164 имеет место следующее равенство: $OA : AB = OA' : A'B'$, т. е. выполняется первое из равенств (22).

Докажем затем, что

$$BC : B'C' = OA : OA'. \qquad (23)$$

Применим теперь задачу 10.32 к треугольнику OCC' и прямой BB'. Получим

$$OB : BC = OB' : B'C'. \qquad (24)$$

Поэтому

$$BC : B'C' = OB : OB'. \qquad (25)$$

Из подобия треугольников OBB' и OAA' следует, что

$$OB : OB' = OA : OA'. \qquad (26)$$

Из равенств (25) и (26) следует равенство первого и третьего отношений в равенстве (22). Итак, все три отношения отрезков, стоящие в равенстве (22), равны. ■

Частным случаем утверждения задачи 10.30 является

Теорема Фалеса **Если параллельные прямые пересекают стороны угла и на одной из сторон угла отсекают равные отрезки, то и на другой его стороне они отсекают равные отрезки** (рис. 165).

Планируем

10.31. Укажите, как построить в треугольнике (рис. 166 и 167 на с. 116) такую точку K, чтобы площади S_1 и S_2 разноцветных частей треугольника были равны.

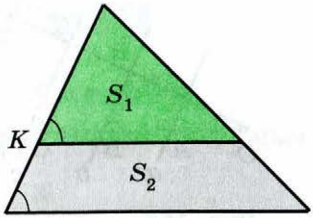


Рис. 166

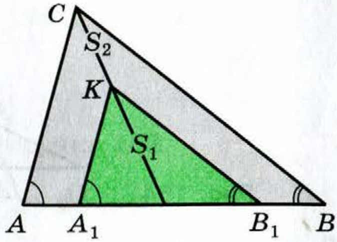


Рис. 167 $S_2 = S_{ACBB_1KA_1}$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

Планируем

II.1. В одной полуплоскости заданы два равнобедренных треугольника, основания которых лежат на граничной прямой a этой полуплоскости. Как провести прямую, параллельную прямой a, которая пересекает эти треугольники по равным хордам?

Доказываем

II.2. Докажите, что два выпуклых четырёхугольника подобны тогда и только тогда, когда соответственно равны их углы и углы между их диагоналями.

II.3. Докажите, что точки пересечения медиан четырёх треугольников, вершины которых совпадают с тремя вершинами данного выпуклого четырёхугольника, являются вершинами четырёхугольника, гомотетичного данному.

II.4. Пусть точки K, M, P, T являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. а) Докажите, что $KMPT$ — квадрат. б) Укажите преобразование, которое переводит $KMPT$ в $ABCD$. в) Чему равны отношения периметров и площадей квадратов $KMPT$ и $ABCD$?

Исследуем

II.5. Сторонами треугольника KMP являются средние линии треугольника ABC. а) Какое преобразование переводит треугольник KMP в треугольник ABC? б) Чему равны отношения периметров и площадей треугольников KMP и ABC?

II.6. а) Нарисуйте правильный шестиугольник $ABCDEF$ и соедините последовательно середины его сторон. Получившийся шестиугольник обозначьте P.
б) Докажите, что шестиугольник $ABCDEF$ подобен шестиугольнику P, и найдите их коэффициент подобия.

в) Укажите преобразование, которое переводит шестиугольник P в $ABCDEF$.

г) Чему равны отношения периметров и площадей шестиугольников P и $ABCDEF$?

II.7. Нарисуйте правильный пятиугольник и его диагонали (пентаграмму). Найдите различные пары гомотетичных фигур на этом рисунке, укажите центры этих гомотетий и вычислите их коэффициенты.

II.8. В выпуклом четырёхугольнике средняя линия двух противоположных сторон равна полусумме двух других сторон. Какого вида этот четырёхугольник? Какого вида будет четырёхугольник, если и другая средняя линия обладает тем же свойством?

Применяем геометрию

II.9. Может ли человек, держа в руках перед собой карманное зеркальце, увидеть себя во весь рост?

Применяем компьютер

II.10. Дана прямая a и две точки A и B по одну сторону от неё. Постройте такую точку C на прямой a, что длина ломаной ACB минимальна.

Указание: для измерения длины ломаной измерьте длину каждого звена, а затем сложите на встроенном в «Живую геометрию» калькуляторе. Для обоснования корректности построения воспользуйтесь симметрией относительно прямой a.

II.11. Найдите кратчайшую замкнутую четырёхзвенную ломаную, вершины которой лежат на сторонах данного квадрата — по одной вершине внутри каждой его стороны.

Указание: для измерения длины ломаной измерьте длину каждого звена, а затем сложите на встроенном в «Живую геометрию» калькуляторе. Для обоснования корректности построения воспользуйтесь симметрией относительно сторон квадрата.

II.12. В правильный восьмиугольник вписали прямоугольник, ограниченный двумя параллельными сторонами восьмиугольника. Какую часть площади восьмиугольника занимает прямоугольник? Проверьте результат с помощью команд «Построение внутренности многоугольника» и «Измерение площади». Затем попробуйте обосновать ответ, воспользовавшись симметрией правильного многоугольника и разделив многоугольник на несколько частей.

Глава III

Геометрия круга

§11. Хорды, касательные, секущие

Цель этой главы — изучение основных свойств окружности и круга. Мы выведем формулу длины окружности и площади круга. Длины и площади криволинейных фигур вычисляют, приближая (аппроксимируя) их прямолинейными фигурами. Формулы для длины окружности и площади круга получают, приближая круг правильными многоугольниками. Поэтому в главе III будут рассмотрены и многоугольники, связанные с окружностью и кругом (не только правильные).

Рис. 168

11.1. Свойства хорд

Напомним, что **окружностью с центром O и радиусом R** называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, удалённых от точки O на расстояние R (рис. 168).

Отрезок, концы которого лежат на окружности, называется её **хордой**, а хорда, проходящая через центр окружности, — это её **диаметр** (см. рис. 168). Перечислим несколько свойств хорд, объединяя вместе пары взаимно обратных утверждений.

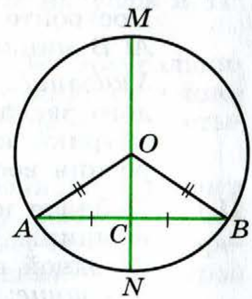


Рис. 169

СВОЙСТВО 1 **Диаметр перпендикулярен хорде, не являющейся диаметром, тогда и только тогда, когда он проходит через середину хорды.**

Доказательство. □ Пусть диаметр MN окружности с центром O проходит через середину C хорды AB (рис. 169). Тогда OC — медиана равнобедренного треугольника OAB. Поэтому $OC \perp AB$, т. е. $MN \perp AB$. Сформулируйте и докажите обратное утверждение самостоятельно. ■

Напомним, что расстояние от точки O до прямой p, не проходящей через точку O, измеряется длиной перпендикуляра OA, опущенного из точки O на прямую p (рис. 170).

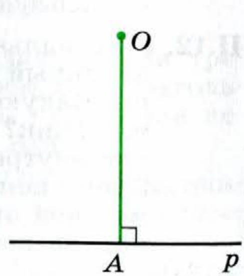


Рис. 170

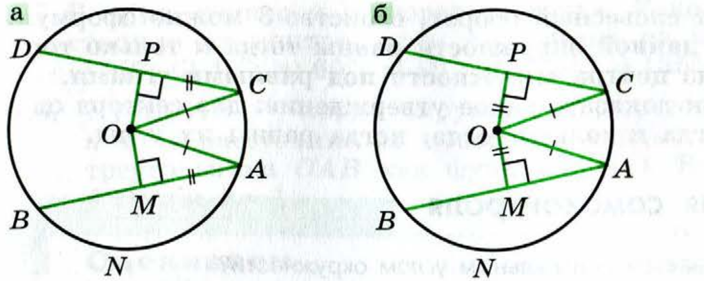


Рис. 171

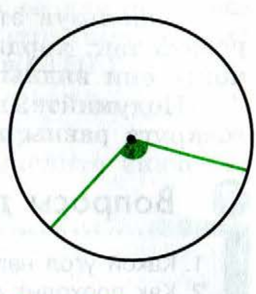


Рис. 172

СВОЙСТВО 2 **Хорды одной окружности равны тогда и только тогда, когда они равноудалены от её центра.**

Доказательство. Пусть AB и CD — две хорды окружности с центром O, а точки M и P — их середины. По свойству 1 треугольники OAM и OCP прямоугольные.

1) Тогда если $AB = CD$, то $AM = CP$ (рис. 171, а). В треугольниках OAM и OCP равны гипотенузы (как радиусы), а также катеты AM и CP. Следовательно, $\triangle OAM = \triangle OCP$, а потому $OM = OP$.

2) Пусть $OM = OP$ (рис. 171, б). Тогда снова $\triangle OAM = \triangle OCP$ (по катету и гипотенузе). Поэтому $AM = CP$. Аналогично доказывается, что $PD = MB$. Поэтому $AB = CD$. ■

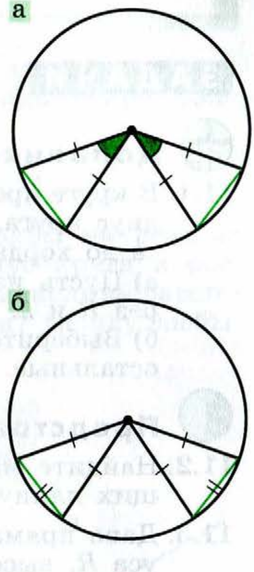


Рис. 173

Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется её **центральным углом** (рис. 172). Каждая пара радиусов задаёт в круге два центральных угла, дополняющих друг друга до полного угла, т. е. до 360°.

О хорде, соединяющей концы дуги, говорят, что она **стягивает** эту дугу, а также центральный угол, соответствующий этой дуге. В следующем свойстве речь идёт о центральных углах, не больших 180°.

СВОЙСТВО 3 **Хорды данной окружности равны тогда и только тогда, когда они стягивают равные центральные углы.**

Свойство 3 непосредственно вытекает из равенства равнобедренных треугольников, основаниями которых являются рассматриваемые хорды, а боковыми сторонами — радиусы, проведённые в концы хорд (рис. 173, а, б).

Мы говорим, что отрезок AB **виден под углом α** из точки O, если $\angle AOB = \alpha$.

Используя этот словесный оборот, свойство 3 можно сформулировать так: **хорды данной окружности равны тогда и только тогда, когда они видны из центра окружности под равными углами.**

Подумайте, как доказать такое утверждение: два сектора одного круга равны тогда и только тогда, когда равны их углы.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой угол называется центральным углом окружности?
2. Как проходит серединный перпендикуляр хорды окружности?
3. Какие свойства равных хорд одной окружности вы узнали?
4. Какие признаки равенства хорд одной окружности вы узнали?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

11.1. В круге проведена хорда. Рассмотрим такие величины: R — радиус круга, d — длина хорды, h — расстояние от центра круга до хорды, φ — угол, под которым хорда видна из центра.
а) Пусть известны R и h. Как найти d и φ? Выразите их через R и h.
б) Выберите любые две из этих величин и выразите через них остальные.

Представляем

11.2. Найдите множество середин хорд данной окружности, имеющих длину a.

11.3. Дана прямая. Найдите множество центров окружностей радиуса R, высекающих на данной прямой хорду длины a.

11.4. Дан выпуклый угол (не развёрнутый). На какой линии располагаются центры окружностей, высекающих на его сторонах равные хорды?

Планируем

11.5. Две окружности пересекаются в двух точках. Радиусы окружностей и расстояние между их центрами известны. Как вычислить длину их общей хорды?

Вычисляем

11.6. В круге радиусом 3 проведена хорда. На каком расстоянии она находится от центра и под каким углом φ она видна из центра, если длина хорды равна: а) 1; б) 2; в) 3? Как изменяются эти величины с увеличением длины хорды?

11.7. В круге радиусом 1 проведена хорда. Какова её длина и расстояние от центра, если она видна из центра под углом: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°?

11.8. Пусть AB — хорда окружности радиусом 2 с центром O, а x — расстояние от центра до хорды. Выразите площадь треугольника OAB как функцию $f(x)$. Вычислите значение $f(x)$ при $x = 1$.

Оцениваем

11.9. Каков центральный угол в круге радиусом 1, если стягивающая его хорда: а) меньше 1; б) больше 1; в) меньше 0,01?

Доказываем

11.10. Из точки A данной окружности проведены две равные хорды AB и AC. Докажите, что хорда BC перпендикулярна диаметру, выходящему из точки A.

Применяем геометрию

11.11. На земле по окружности расставляют столбы на равных расстояниях друг от друга. Известны радиус круга и расстояния между соседними столбами. Как вычислить расстояния между столбами, идущими через один? между любыми столбами?

11.2. Касание прямой и окружности. Взаимное расположение прямой и окружности

О *прямой и окружности* на плоскости, имеющих *единственную* общую точку, говорят, что они **касаются друг друга** (рис. 174), а прямая в этом случае называется **<u>касательной к окружности</u>** (а также **<u>касательной к кругу</u>**, ограниченному этой окружностью). Общая точка касающихся прямой и окружности (круга) называется их **<u>точкой касания</u>**.

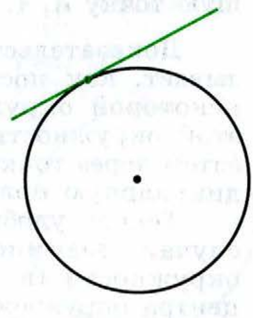


Рис. 174

Характерным свойством касательной к окружности является её перпендикулярность к радиусу, проведённому в точку касания. Об этом и говорится в следующей теореме:

Теорема (*о касательной к окружности*). **1) Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания (свойство касательной). 2) Прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная её радиусу, проведён-**

ному в эту точку, касается окружности (признак касательной).

Короче можно сказать так: *прямая, проходящая через точку окружности, касается окружности тогда и только тогда, когда она перпендикулярна радиусу окружности, проведённому в эту точку.*

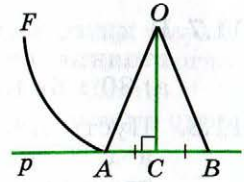


Рис. 175

Доказательство. 1) *Свойство касательной.* Пусть прямая p касается окружности F в некоторой точке A, т. е. A — их единственная общая точка. Проведём радиус OA в точку A. Допустим, что OA не перпендикулярен прямой p. Опустим тогда из точки O на прямую p перпендикуляр OC (рис. 175). Отложим на луче прямой p, дополнительном к лучу CA, отрезок $CB = CA$ и построим треугольник OBC (см. рис. 175). Прямоугольные треугольники OAC и OBC равны (по двум катетам). Поэтому $OB = OA$. Значит, точка B лежит на окружности F, а тогда прямая p и окружность F имеют две общие точки A и B. Получили противоречие. Итак, радиус OA перпендикулярен к касательной p.

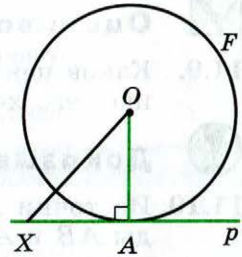


Рис. 176

2) *Признак касательной.* Возьмём любую точку A окружности F, проведём радиус OA и построим прямую p через точку A, перпендикулярную радиусу OA (рис. 176). Любая точка X прямой p, отличная от точки A, удалена от центра O дальше чем на радиус OA. Поэтому точка X не лежит на окружности F. Значит, окружность F и прямая p имеют лишь одну общую точку A, т. е. они касаются в этой точке. ■

Доказательство признака касательной указывает, как построить касательную прямую к некоторой окружности F в заданной точке A этой окружности: надо провести радиус OA, а затем через точку A провести прямую p, перпендикулярную прямой OA.

Теперь удобно перечислить все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности (в зависимости от расстояния от центра окружности до прямой).

1) Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то прямая и окружность не имеют общих точек (рис. 177, а).

2) Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая касается окружности (рис. 177, б).

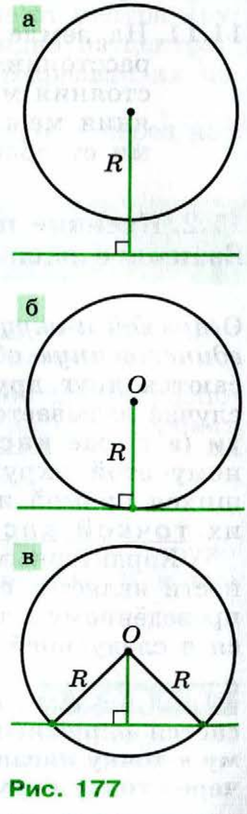


Рис. 177

3) Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая пересекает окружность ровно в двух точках (рис. 177, в).

Построение этих точек пересечения прямой и окружности фактически было проведено при доказательстве свойства касательной. Подумайте, почему их не может быть больше двух.

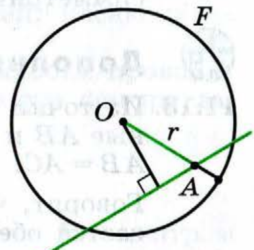
Вопросы для самоконтроля

1. От чего зависит взаимное расположение прямой и окружности?
2. Перечислите случаи взаимного расположения прямой и окружности и сделайте рисунки.
3. Какую прямую называют касательной к окружности?
4. Сформулируйте свойство прямой, касательной к окружности.
5. Сформулируйте признак касания прямой и окружности.

ЗАДАЧИ

Разбираемся в решении

11.12. Через данную точку плоскости провести прямую, касающуюся данной окружности.

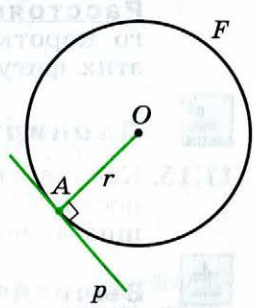


$OA < r$

Рис. 178

Решение. Пусть заданы точка A и окружность F с центром в точке O и радиусом r. Решение этой задачи на построение зависит от длины отрезка OA. Возможны три случая.

1) $OA < r$ (рис. 178). Тогда любая прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность F (так как расстояние от точки O до любой такой прямой меньше r). Касательных к окружности F среди этих прямых *нет*.



$OA = r$

Рис. 179

2) $OA = r$ (рис. 179). В этом случае точка A лежит на окружности F и касательной к этой окружности является прямая p, проходящая через A перпендикулярно прямой OA. Такая прямая *единственная*.

3) $OA > r$ (рис. 180). Если прямая p, проходящая через точку A, касается окружности F в точке B, то треугольник OAB прямоугольный (по свойству касательной). Поэтому построение касательной AB сводится к построению прямоугольного треугольника OAB по гипотенузе OA и катету

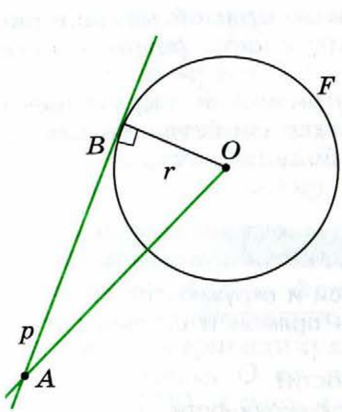


Рис. 180

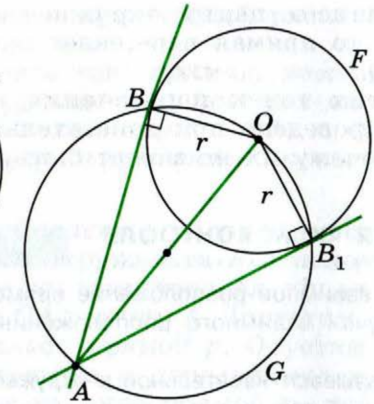


Рис. 181

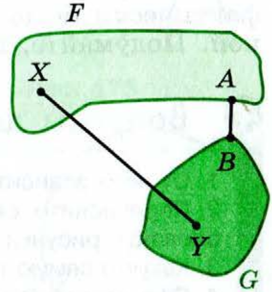


Рис. 182

$OB = r$. Это построение можно выполнить, построив на диаметре OA окружность G и проведя её хорды $OB = r$ и $OB_1 = r$ (рис. 181): получим *два* решения. Эти решения симметричны относительно прямой OA.

Дополняем теорию

11.13. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC (точки B и C — точки касания). Докажите, что $AB = AC$.

Говорят, что **окружность вписана в угол**, если она касается обеих сторон этого угла.

11.14. Докажите, что множеством центров окружностей, вписанных в данный угол, является биссектриса этого угла (исключая вершину угла).

Расстояние между двумя фигурами – это длина самого короткого (кратчайшего) отрезка, соединяющего точки этих фигур (рис. 182).

Планируем

11.15. Как найти на плоскости расстояние: а) от точки до окружности; б) между прямой и окружностью, не имеющими общих точек?

Вычисляем

11.16. К окружности F с центром O через её точку C провели касательную прямую. На этой прямой взяли точку A. Найдите радиус окружности F, если $OA = c$ и $AC = a$.

11.17. В окружности с центром O провели хорду AB. Известно, что $\angle AOB = \varphi$. Найдите углы между хордой AB и касательными к окружности, проведёнными через точки A и B.

11.18. В круге радиусом R проведена хорда длины a и параллельные ей касательные к кругу прямые. Найдите расстояния от хорды до касательных.

Доказываем

11.19. Докажите, что касательные прямые, проведённые через концы диаметра окружности к этой окружности, параллельны.

11.20. Прямая a касается двух окружностей в точках A и B. Докажите, что их радиусы, проведённые в эти точки, параллельны.

Представляем

11.21. На плоскости через фиксированную точку некоторой прямой проводятся всевозможные окружности, касающиеся этой прямой. Какую фигуру заполнят центры этих окружностей?

11.22. Какую фигуру заполнят центры окружностей, касающиеся двух параллельных прямых?

11.23. Через всевозможные точки некоторой окружности проводят касательные прямые к этой окружности. Какую фигуру заполнят эти прямые?

Исследуем

11.24. Из точки A проведены к окружности радиусом R с центром O две касательные AB и AC (B и C — точки касания). Обозначим $\angle BAC$ через φ. а) Как, зная R и AO, найти φ и BC? б) Как, зная φ и AO, найти R? в) Пусть AO возрастает, R постоянно. Как изменяется φ? г) Пусть R растёт, AO постоянно. Как изменяется φ?

Строим

11.25. Внутри угла задана точка. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку.

11.3. Градусная мера дуги окружности

С градусным измерением дуг вы знакомы, например, из географии и знаете, что значит, что точка на Земле имеет такие координаты: 60° северной широты и 30° восточной долготы. В геометрии градусное измерение дуг вводится так. Между дугами данной окружности и её центральными углами устанавливается так называемое взаимно однозначное соответствие: каждому центральному углу соответствует та дуга, которую этот угол «высекает» из окружности (рис. 183), и наоборот.

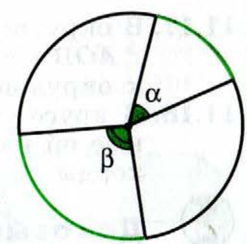


Рис. 183

Градусная мера дуги окружности определяется как градусная мера центрального угла, который соответствует этой дуге. Четверть окружности имеет градусную меру 90°, полуокружность — 180°, а вся окружность — 360°. Если дуга AB имеет градусную меру α°, то пишут: $\smile AB = \alpha^\circ$.

Две дуги **одной** окружности равны, если их градусные меры равны: такие дуги, очевидно, можно совместить поворотом. Ясно, что равны также две дуги, имеющие равные градусные меры на окружностях с равными радиусами, но если радиусы окружностей не равны, то равными их дуги не будут.

Вопросы для самоконтроля

1. Как вводят градусную меру дуги?
2. Каковы градусные меры двух равных дуг одной окружности?

ЗАДАЧИ

Представляем

11.26. На дуги каких градусных мер разбиты: а) круглые циферблаты часов; б) компас? Приведите сами аналогичные примеры.

11.27. Из точки проводятся две касательные к окружности. Объясните, почему при удалении точки от окружности градусная мера ближайшей к этой точке дуги окружности между точками касания увеличивается.

Вычисляем

11.28. Отрезки CA и CB касаются некоторой окружности в точках A и B. Найдите градусную меру дуги AB, если $\angle ACB = \varphi$.

11.29. В угол φ вписана окружность, т. е. она касается сторон угла. Каково отношение градусных мер дуг этой окружности с концами в точках касания? Как изменяется это отношение при изменении угла φ? При каком угле φ оно равно 2?

Доказываем

11.30. Докажите, что у одного и того же круга равны две дуги, заключённые между: а) двумя параллельными хордами; б) касательной и параллельной ей хордой.

Исследуем

11.31. Часы показывают ровно 3 ч. Какова градусная мера дуги, которую пройдёт конец минутной стрелки за то время, когда она нагонит часовую?

11.4. Измерение вписанных углов

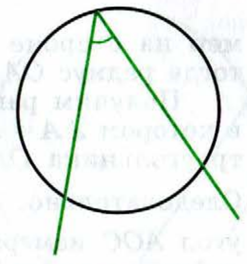


Рис. 184

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **углом, вписанным в окружность** (рис. 184). Можно сказать и так: **углом, вписанным в окружность**, называется угол между двумя хордами окружности, имеющими общий конец (рис. 185). Говорят, что вписанный **угол опирается на дугу**, которая лежит между его сторонами.

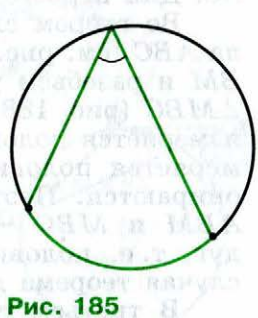


Рис. 185

Теорема (*об измерении вписанного угла*). **Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается.**

Доказательство. Пусть угол ABC вписан в окружность, т.е. BA и BC — хорды окружности. Возможны три случая — они изображены на рисунке 186, а—в.

В первом случае центр окружности — точка O — лежит на одной из сторон угла ABC, напри-

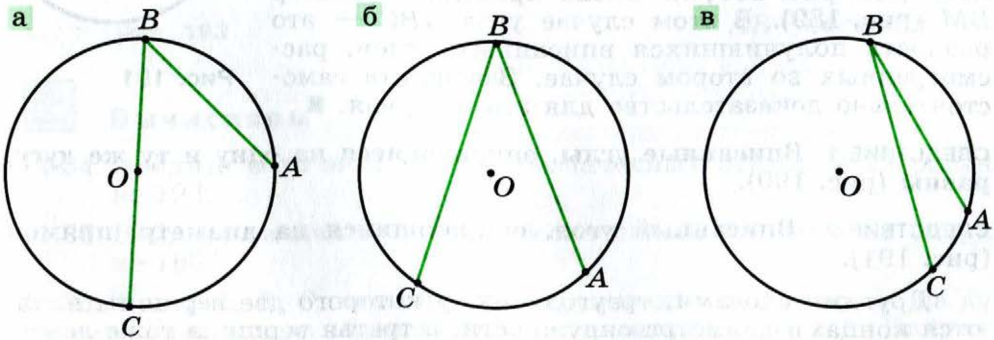


Рис. 186

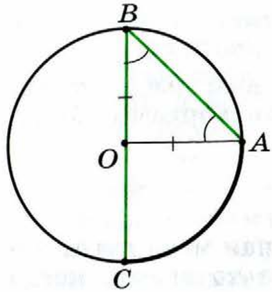


Рис. 187

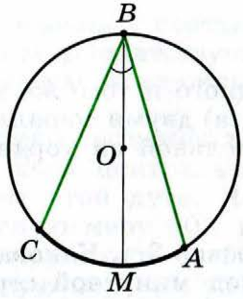


Рис. 188

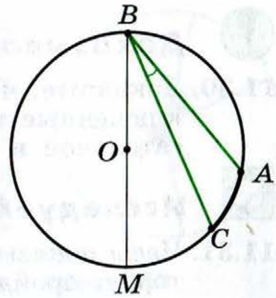


Рис. 189

мер на стороне BC (см. рис. 186, а). Проведём тогда радиус OA (рис. 187).

Получим равнобедренный треугольник OAB, в котором $\angle A = \angle B$. Так как $\angle AOC$ внешний для треугольника OAB, то $\angle AOC = \angle A + \angle B = 2\angle B$. Следовательно, $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$. Но центральный угол AOC измеряется дугой AC. Значит, его половина — угол B — измеряется половиной дуги AC. Для первого случая теорема доказана.

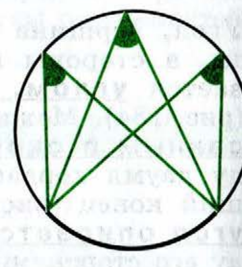


Рис. 190

Во втором случае центр O лежит внутри угла ABC (см. рис. 186, б). Тогда проведём диаметр BM и разобьём угол ABC на два угла: $\angle ABM$ и $\angle MBC$ (рис. 188). Как уже доказано, угол ABM измеряется половиной дуги AM, а угол MBC измеряется половиной дуги MC, на которые они опираются. Поэтому угол ABC — сумма углов ABM и MBC — измеряется полусуммой этих дуг, т. е. половиной дуги AMC. И для второго случая теорема доказана.

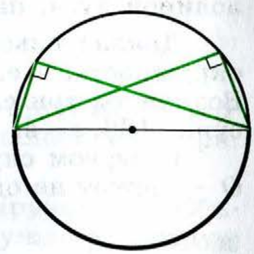


Рис. 191

В третьем случае центр O лежит вне угла ABC (см. рис. 186, в). Снова проводим диаметр BM (рис. 189). В этом случае угол ABC — это разность получившихся вписанных углов, рассмотренных во втором случае. Завершите самостоятельно доказательство для этого случая. ■

СЛЕДСТВИЕ 1 **Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны** (рис. 190).

СЛЕДСТВИЕ 2 **Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой** (рис. 191).

Другими словами, треугольник, у которого две вершины являются концами диаметра окружности, а третья вершина тоже лежит на окружности, прямоугольный.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем измеряется вписанный угол?
2. На плоскости рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники, гипотенузой которых является данный отрезок. Где лежат их вершины?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

11.32. Докажите, что угол между хордой окружности и её касательной измеряется половиной дуги, стягиваемой этой хордой (рис. 192).

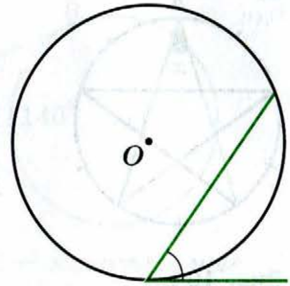


Рис. 192

Смотрим

11.33. Укажите равные углы на рисунке 193. Найдите подобные треугольники на этом рисунке.

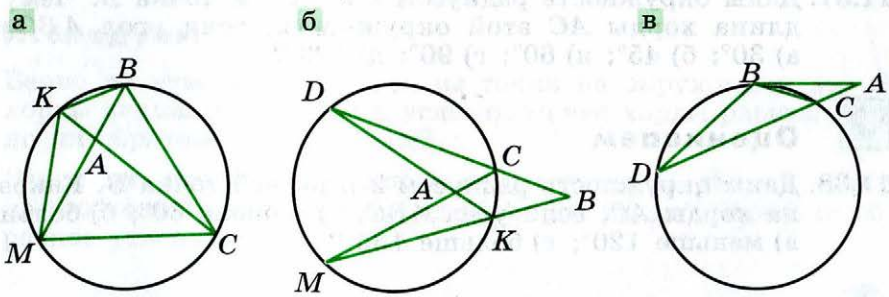


Рис. 193

AB – касательная

Вычисляем

11.34. Найдите величины углов, обозначенных буквой x на рисунке 194.

11.35. Найдите величины углов, обозначенных буквой y на рисунке 195.

11.36. Точки A, B, C, лежащие на окружности, разбивают её на дуги, градусные меры которых относятся как $3:4:5$. Найдите углы треугольника ABC.

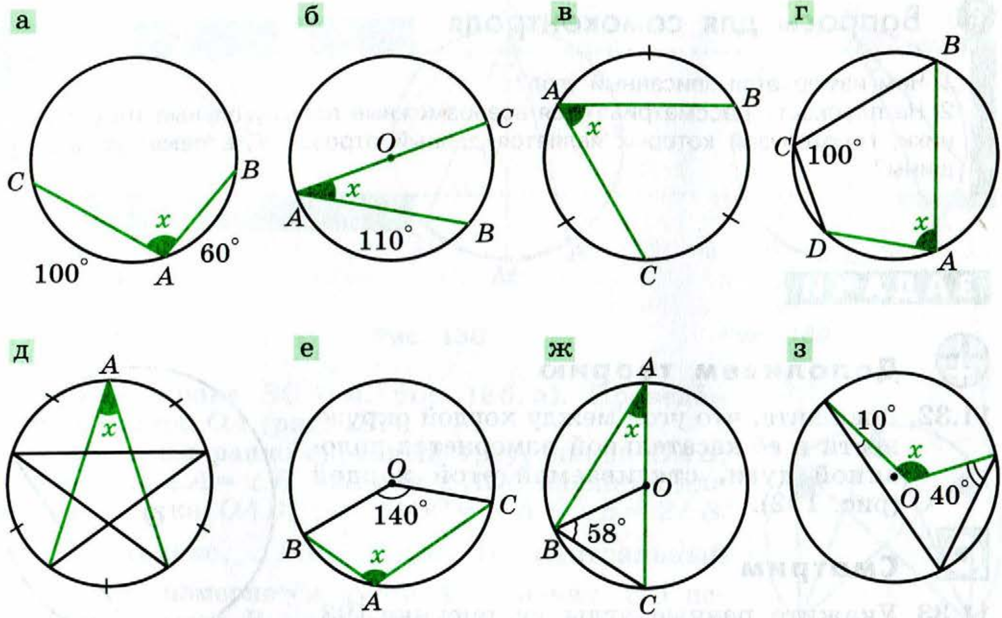


Рис. 194

11.37. Даны окружность радиусом 2 и на ней точка B. Чему равна длина хорды AC этой окружности, если угол ABC равен: а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $90°$; д) $120°$?

Оцениваем

11.38. Даны окружность радиусом 2 и на ней точка B. Какова длина хорды AC, если угол ABC: а) меньше $30°$; б) больше $45°$; в) меньше $120°$; г) больше $135°$?

Доказываем

11.39. Глядя на рисунок 195 и вспоминая решение задачи 11.35, сформулируйте и докажите следующие теоремы:

а) об измерении угла, вершина которого лежит внутри круга (см. рис. 195, в);

б) об измерении угла, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекают окружность круга (см. рис. 195, а и б);

в) об измерении угла, одна сторона которого касается окружности, а другая — пересекает окружность (см. рис. 195, г);

г) об измерении угла, обе стороны которого касаются окружности (см. рис. 195, д).

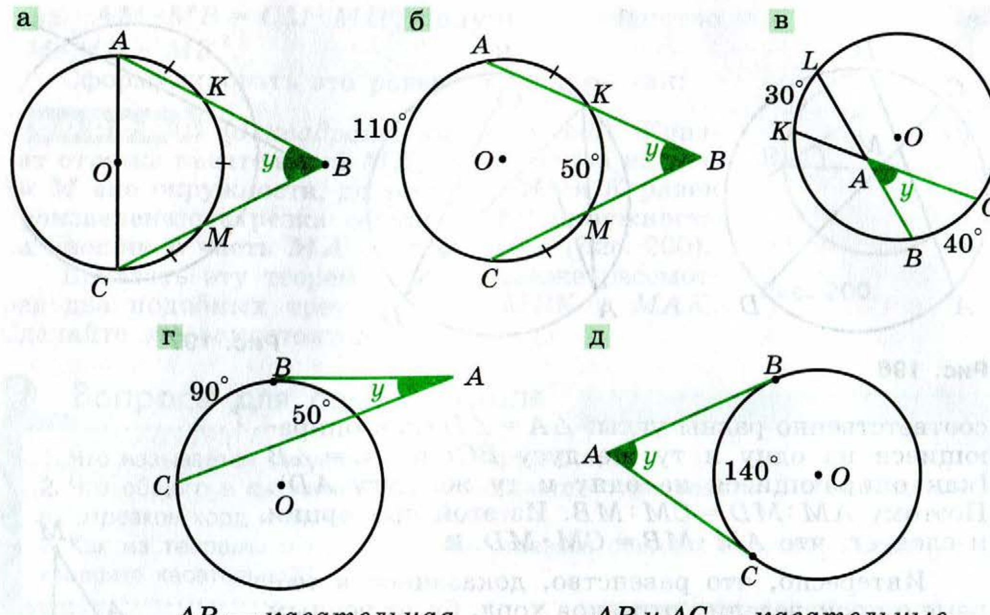


Рис. 195

Исследуем

11.40. Верно ли утверждение: если из точки на окружности две её хорды видны под равными углами, то эти хорды равны? Верно ли обратное утверждение?

11.41. Верно ли, что бóльшая хорда окружности из данной точки на этой окружности видна под бóльшим углом? Верно ли обратное утверждение?

11.5. Произведения отрезков хорд и секущих

Все три теоремы, доказанные в этом пункте, являются следствиями теорем о подобии треугольников и теоремы об измерении вписанного угла.

Теорема (*о произведении отрезков хорд*). **Если две хорды AB и CD одной окружности пересекаются в точке M (рис. 196, а), то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.**

Доказательство. Проведём хорды AC и BD (рис. 196, б). Получим два треугольника CAM и BDM. Они подобны, так как в них

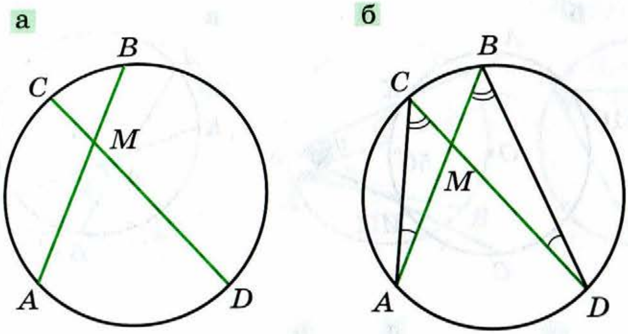


Рис. 196

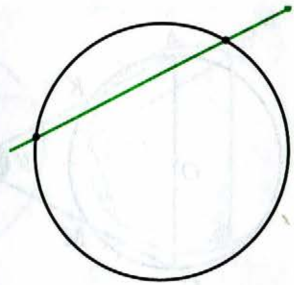


Рис. 197

соответственно равны углы: $\angle A = \angle D$ (как опирающиеся на одну и ту же дугу BC) и $\angle C = \angle B$ (как опирающиеся на одну и ту же дугу AD). Поэтому $AM : MD = CM : MB$. Из этой пропорции и следует, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. ■

Интересно, что равенство, доказанное в теореме о произведении отрезков хорд, будет верным и для двух секущих одной окружности. А **секущей** для окружности называется луч с началом в некоторой точке, взятой вне ограниченного ею круга, который пересекает данную окружность (рис. 197).

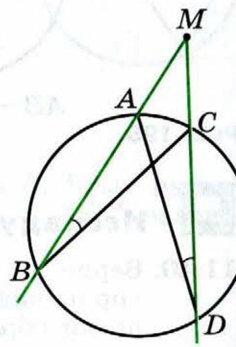


Рис. 198

Теорема (*о произведении отрезков секущих*). **Если из точки M вне окружности проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках A и B, а другая — в точках C и D, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.**

Доказательство. Можно считать, что точка A лежит на отрезке MB, а точка C лежит на отрезке MD (рис. 198). Проведём хорды BC и AD (см. рис. 198). Треугольники MBC и MDA подобны: у них угол M общий, а вписанные углы ABC и ADC равны как опирающиеся на одну и ту же дугу AC. Записав пропорциональность их сторон, как и при доказательстве предыдущей теоремы, приходим к равенству $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. ■

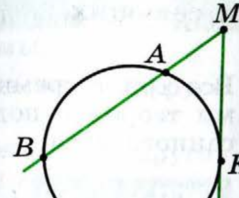


Рис. 199

Представим себе, что секущий луч MC, вращаясь вокруг точки M, займёт положение луча, касающегося окружности в точке K (рис. 199). Тогда окажется, что точки C и D совпадут, и получим, что $CM = MD = MK$. И из равенства $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ получим равенство $AM \cdot MB = MK^2$.

Сформулировать это равенство можно так:

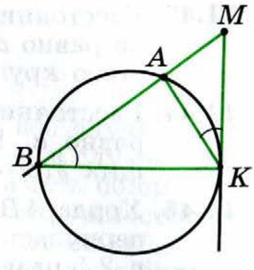


Рис. 200

Теорема (*о квадрате касательной*). **Квадрат отрезка касательной MK, проведённой из точки M вне окружности, до точки касания K равен произведению отрезка секущей MB окружности на внешнюю часть MA этой секущей (рис. 200).**

Доказать эту теорему можно также рассмотрев два подобных треугольника MBK и MAK. Сделайте это самостоятельно.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется секущей данной окружности?
2. Что общего в формулировках и доказательствах теорем о произведениях отрезков хорд и отрезков секущих?
3. Как из теоремы о произведении отрезков секущих получить теорему о квадрате касательной?

ЗАДАЧИ

Вычисляем

11.42. На рисунке 201 изображена полуокружность с диаметром AB. Найдите x.

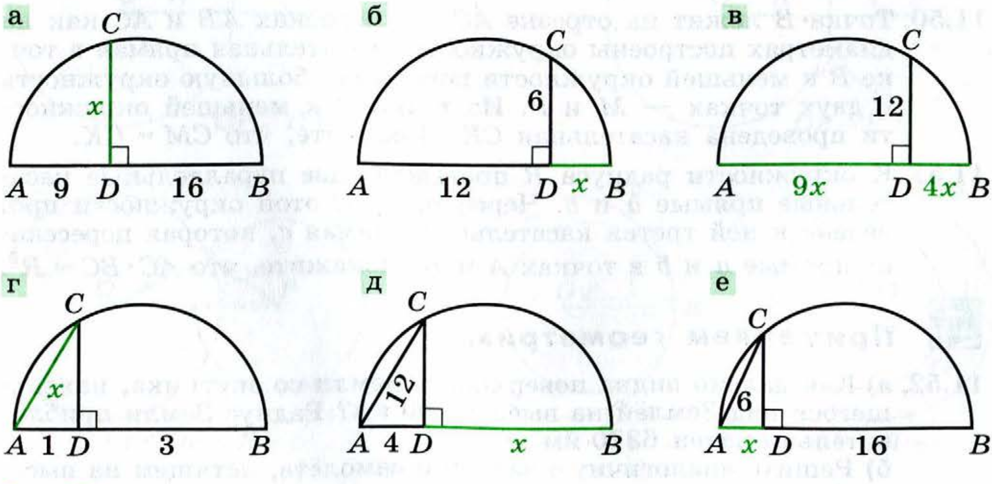


Рис. 201

11.43. Расстояние от точки M внутри круга радиуса R до его центра равно a. Найдите, чему равно произведение отрезков хорд этого круга, проходящих через точку M.

11.44. Расстояние от точки M вне круга радиуса R до его центра равно a. Найдите, чему равно произведение отрезков секущих этого круга, идущих из точки M.

11.45. Хорда AB, проходящая через точку M некоторого круга, повернулась вокруг точки M так, что отрезок AM увеличился в 2,5 раза. Как изменился отрезок BM?

11.46. Секущая, идущая из точки M и пересекающая окружность в точках A и B, повернулась вокруг точки M так, что её внешний отрезок AM уменьшился в 3 раза. Как изменился отрезок BM?

11.47. Из точки M проведены к одной окружности касательная MC (C — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках A и B (B лежит на MA). Найдите MA и MC, если $MA + MC = 30$ и MB на 4 меньше MC.

Планируем

11.48. Как построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой?

Доказываем

11.49. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что касательные, проведённые к ним из любой точки прямой AB (вне отрезка AB), равны.

11.50. Точка B лежит на отрезке AC. На отрезках AB и AC как на диаметрах построены окружности. Касательная прямая в точке B к меньшей окружности пересекает бо́льшую окружность в двух точках — M и P. Из точки C к меньшей окружности проведена касательная CK. Докажите, что $CM = CK$.

11.51. К окружности радиуса R проведены две параллельные касательные прямые a и b. Через точку C этой окружности проведена к ней третья касательная прямая c, которая пересекает прямые a и b в точках A и B. Докажите, что $AC \cdot BC = R^2$.

Применяем геометрию

11.52. а) Как далеко видна поверхность Земли со спутника, находящегося над Землёй на высоте 200 км? Радиус Земли приблизительно равен 6370 км.

б) Решите аналогичную задачу о самолёте, летящем на высоте 10 км.

11.6. Взаимное расположение двух окружностей

Рассмотрим рисунок 202, на котором изображены все случаи расположения двух окружностей. Мы видим, что, как и в случае прямой и окружности, две окружности могут либо не иметь общих точек, либо иметь единственную общую точку (такие окружности называются **касающимися**), либо пересекаться в двух точках.

Какой именно из случаев взаимного расположения двух окружностей имеет место, зависит от соотношений между радиусами R и r окружностей F и G (будем считать, что $R > r$) и расстоянием a между их центрами O и P.

Ясно, что если $a > R + r$, то окружности F и G не имеют общих точек и лежат вне друг друга (рис. 202, а).

Если $a = R + r$, то F и G касаются друг друга внешним образом в некоторой единственной точке A, которая лежит на линии центров — прямой OP — между точками O и P (рис. 202, б).

Если $a < R + r$, но $a > R - r$, то окружности F и G пересекаются в двух точках, симметричных относительно линии центров (рис. 202, в).

Если $a = R - r$ (когда $R - r > 0$), то окружности касаются в некоторой точке B, лежащей на прямой OP (рис. 202, г).

Наконец, если $a < R - r$, то F и G не имеют общих точек и G лежит внутри F (рис. 202, д).

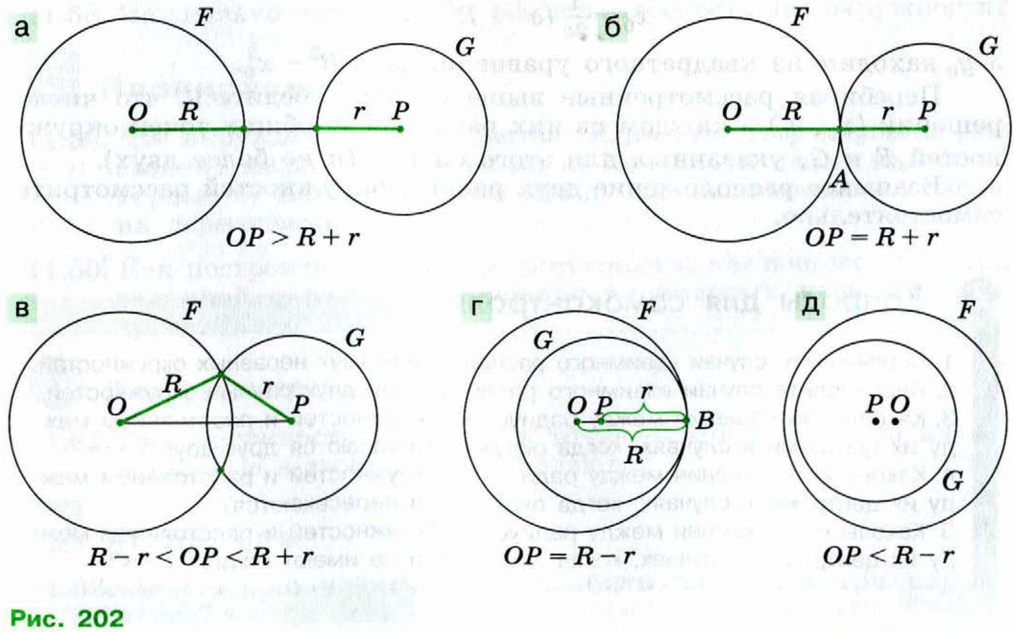


Рис. 202

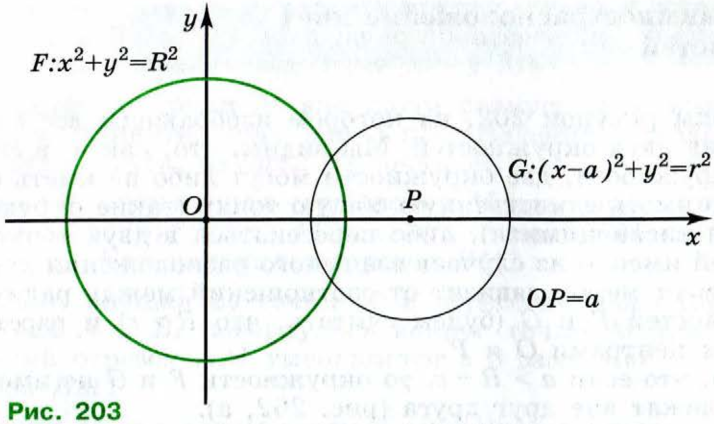


Рис. 203

Особо выделим случай, когда $a = 0$: в этом случае окружности F и G — концентрические, у них общий центр.

Чтобы доказать эти утверждения, удобно применить координатный метод. Началом координат x, y выберем точку O, а осью x — прямую OP, направленную от O к P (рис. 203).

Окружность F задаётся уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, а окружность G – уравнением $(x - a)^2 + y^2 = r^2$. Следовательно, координаты общих точек окружностей F и G являются решениями системы этих уравнений. Если пара $(x_0; y_0)$ является решением этой системы, то

$$x_0 = \frac{1}{2a}(a^2 + R^2 - r^2),$$

а y_0 находим из квадратного уравнения $y_0^2 = R^2 - x_0^2$.

Перебирая рассмотренные выше случаи, убедитесь, что число решений $(x_0; y_0)$ в каждом из них равно числу общих точек окружностей F и G, указанных для этого случая (и не более двух).

Взаимное расположение двух равных окружностей рассмотрите самостоятельно.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите случаи взаимного расположения двух неравных окружностей.
2. Перечислите случаи взаимного расположения двух равных окружностей.
3. Каковы соотношения между радиусами окружностей и расстоянием между их центрами в случаях, когда окружности касаются друг друга?
4. Каковы соотношения между радиусами окружностей и расстоянием между их центрами в случаях, когда окружности пересекаются?
5. Каковы соотношения между радиусами окружностей и расстоянием между их центрами в случаях, когда окружности не имеют общих точек?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

11.53. Две окружности пересекаются. Докажите, что их линия центров является серединным перпендикуляром их общей хорды.

Рисуем

11.54. Нарисуйте различные случаи расположения двух окружностей. Нарисуйте (если это возможно) их общие касательные в каждом из этих случаев.

Представляем

11.55. Две окружности касаются. Укажите наиболее удалённые точки этих окружностей.

11.56. Одна окружность катится по другой (неподвижной). По какой линии движется её центр?

11.57. Радиусы двух окружностей 2 и 4. Как расположены окружности, если расстояние между их центрами равно: а) 7; б) 6; в) 5; г) 4; д) 3; е) 2; ж) 1?

11.58. На сколько частей могут разбить плоскость две окружности?

Планируем

11.59. Две окружности пересекаются. Известны их радиусы и расстояние между их центрами. а) Как найти длину их общей хорды? б) Как найти угол между их касательными в точке их пересечения?

11.60*. Как построить три равные окружности, касающиеся изнутри заданной окружности, каждая из которых касается двух других?

Доказываем

11.61. Две окружности касаются в точке A. Докажите, что их касательные в этой точке совпадают.

Исследуем

11.62. На сколько частей могут разбить плоскость три окружности?

§ 12. Вписанные и описанные окружности

12.1. Окружность, описанная вокруг многоугольника

Говорят, что **многоугольник вписан в окружность**, если все его вершины лежат на ней (рис. 204, а). Тогда об этой окружности говорят, что она описана вокруг многоугольника. Итак, **окружность описана вокруг многоугольника**, если она проходит через все его вершины. Ясно, что вокруг многоугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда найдётся точка, равноудалённая от всех его вершин (рис. 204, б). Такой точкой является центр правильного многоугольника (см. п. 9.4). Эта точка лежит на серединном перпендикуляре каждой стороны многоугольника (рис. 204, в). Следовательно, *вокруг многоугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры всех его сторон имеют общую точку.* Она и будет центром описанной окружности.

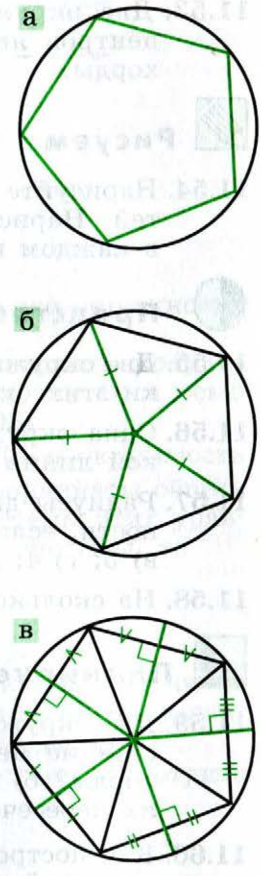


Рис. 204

Вокруг не каждого многоугольника можно описать окружность. Например, её нельзя описать вокруг параллелограмма, отличного от прямоугольника, или вокруг невыпуклого многоугольника.

Вокруг любого треугольника можно описать окружность. Докажем существование такой точки, которая равноудалена от всех вершин треугольника.

Теорема (*об окружности, описанной вокруг треугольника*). **Вокруг каждого треугольника можно описать окружность. Центр этой окружности равноудалён от вершин треугольника и является точкой пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.**

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Проведём серединные перпендикуляры p и q его сторон AB и BC (рис. 205, а). Они пересекутся в некоторой точке O (на плоскости прямые, перпендикулярные пересекающимся прямым, пересекаются).

Так как точка O лежит на p, то $OA = OB$. Поскольку точка O лежит на q, то $OB = OC$. Поэтому $OA = OB = OC$. Итак, точка O равноудалена от всех трёх вершин треугольника ABC и является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Заме-

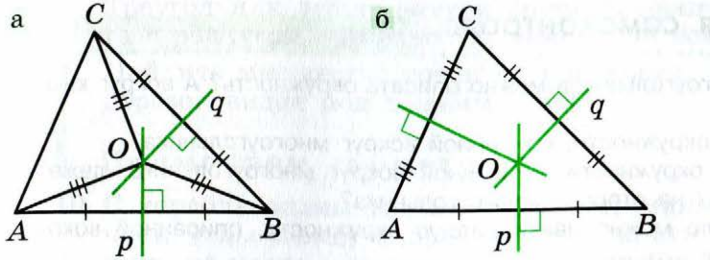


Рис. 205

тим, что из равенства $OA = OC$ следует, что точка O лежит и на серединном перпендикуляре стороны AC (рис. 205, б). ■

Проще всего указать положение центра O окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника ABC: точка O — середина его гипотенузы (рис. 206, а). Если треугольник ABC остроугольный, то точка O лежит внутри треугольника (рис. 206, б). Если же ABC — тупоугольный треугольник, то точка O лежит вне треугольника (рис. 206, в).

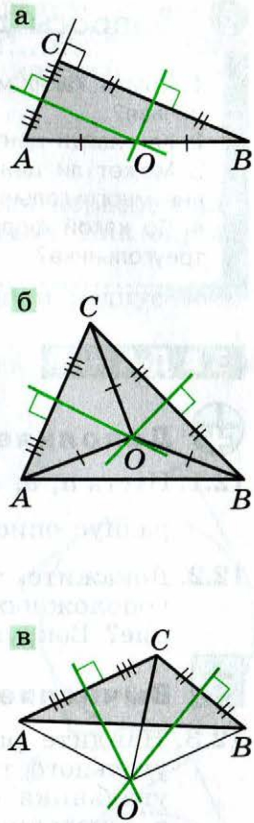


Рис. 206

Интересно, что радиус R окружности, описанной вокруг треугольника ABC, можно найти, зная лишь один из углов треугольника и противолежащую ему сторону, например, зная угол A и сторону a. Покажем, что

$$2R = \frac{a}{\sin A}. \qquad (1)$$

□ Пусть O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 207).

Проведём из вершины B диаметр BM и построим треугольник BMC. Он прямоугольный с прямым углом C (угол C опирается на диаметр), гипотенузой $BM = 2R$, катетом a и острым углом M, равным углу A (углы M и A опираются на одну и ту же дугу BC). Так как $BC = BM \sin A$, то справедливо равенство (1). ■

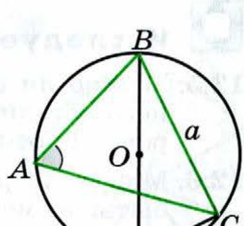


Рис. 207

Равенство (1) показывает, что *диаметр окружности, описанной около треугольника, равен отношению любой его стороны к синусу противолежащего угла*, т. е.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \qquad (2)$$

Мы ещё раз доказали *теорему синусов*. Сформулируйте её.

Вопросы для самоконтроля

1. Вокруг каких многоугольников можно описать окружность? А вокруг каких нельзя?
2. Как найти центр окружности, описанной вокруг многоугольника?
3. Может ли центр окружности, описанной вокруг многоугольника, лежать вне многоугольника? на стороне многоугольника?
4. По какой формуле можно найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

12.1. Пусть a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь, R — радиус описанной окружности. Докажите, что $S = \frac{abc}{4R}$.

12.2. Докажите, что во вписанном четырёхугольнике суммы противоположных углов равны 180°. Верно ли обратное утверждение? Вокруг какой трапеции можно описать окружность?

Вычисляем

12.3. Найдите радиус окружности, описанной вокруг: а) прямоугольного треугольника с гипотенузой c; б) правильного треугольника со стороной a; в) равнобедренного треугольника с основанием 12 и боковой стороной 10; г) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной c; д) равнобедренного треугольника, площадь которого равна S, а угол при основании равен φ.

12.4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если: а) $\angle A = 70°$, $\angle B = 50°$, $AB = 8$; б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $AB = c$.

Исследуем

12.5. Можно ли восстановить равнобедренный треугольник, если от него остались центр описанной окружности и: а) боковая сторона; б) основание?

12.6. Может ли радиус описанной вокруг треугольника окружности быть: а) меньше каждой его стороны; б) больше каждой его стороны; в) равен каждой его стороне?

12.7. В треугольнике все стороны различны. Можно ли узнать, какая из них видна из центра описанной окружности под наибольшим углом?

12.8. Треугольник лежит внутри круга. Сравните радиус этого круга с радиусом окружности, описанной вокруг треугольника.

12.9. Найдите множество точек на плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Применяем геометрию

12.10. С корабля видны три маяка. Измерениями на корабле получены углы между направлениями на эти маяки. Как определить на карте местонахождение корабля?

12.11. Как, имея в руках маленькую линейку, найти радиус большого круга?

12.12. Пластинка имеет форму сегмента круга. Как вычислить его радиус?

12.2. Окружность, вписанная в многоугольник

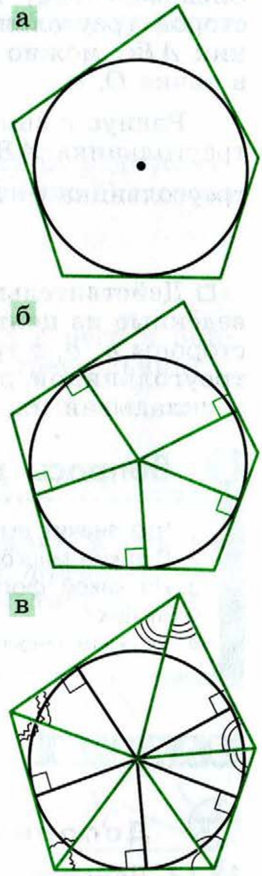


Рис. 208

Говорят, что **многоугольник описан около окружности**, если все его стороны касаются данной окружности (рис. 208, а). Тогда об этой окружности говорят, что она вписана в данный многоугольник. Итак, **окружность вписана в многоугольник**, если она касается всех его сторон.

Расстояние от центра окружности, вписанной в многоугольник, до каждой из сторон многоугольника равно радиусу этой окружности (рис. 208, б). Такой точкой является центр правильного многоугольника — этот центр равноудалён от всех сторон этого многоугольника (см. п. 9.4). Следовательно, центр окружности является точкой пересечения биссектрис всех углов этого многоугольника (рис. 208, в). Не в каждый многоугольник можно вписать окружность. Например, в параллелограмм можно вписать окружность лишь тогда, когда параллелограмм является ромбом (объясните почему, рис. 209). Докажем, что в каждый треугольник можно вписать окружность.

Теорема *(об окружности, вписанной в треугольник)*. **В каждый треугольник можно вписать окружность. Центр этой окружности равноудалён от сторон треугольника и является точкой пересечения биссектрис треугольника.**

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC (рис. 210).

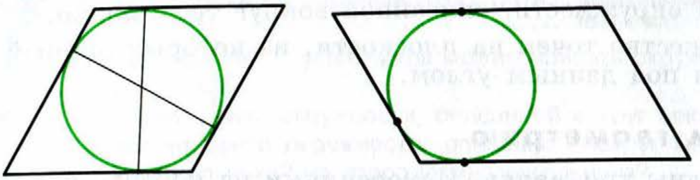


Рис. 209

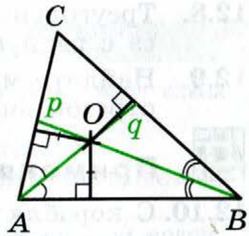


Рис. 210

Проведём биссектрисы p и q его углов A и B. Они пересекутся в некоторой точке O. Поскольку точка O лежит на p, то она равноудалена от сторон AB и BC. Поскольку точка O лежит на q, то она равноудалена от AB и AC. Следовательно, точка O равноудалена от всех сторон треугольника ABC. Поэтому в треугольник ABC можно вписать окружность с центром в точке O. ■

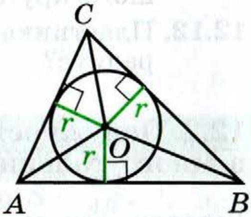


Рис. 211

Радиус r вписанной окружности, площадь S треугольника ABC и половина периметра этого треугольника — величина $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ связаны простой формулой

$$S = pr. \qquad (3)$$

□ Действительно, высоты треугольников OAB, OAC и OBC, проведённые из центра O, равны r, а основания этих треугольников — стороны a, b, c треугольника ABC (рис. 211). Сумма площадей этих треугольников равна S. Вычисляя площади этих треугольников и складывая их, и приходим к равенству (3). ■

Вопросы для самоконтроля

1. Что значит выражение *окружность вписана в многоугольник*?
2. В какие многоугольники можно вписать окружность? Где лежит её центр?
3. По какой формуле можно найти радиус окружности, вписанной в треугольник?
4. Укажите многоугольники, в которые нельзя вписать окружность.

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

12.13. Докажите, что формула (3) справедлива для любых многоугольников, в которые можно вписать окружность.

12.14. Докажите, что в описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны. Докажите обратное.

Представляем

12.15. Всегда ли в равнобокую трапецию можно вписать окружность?

12.16. Должна ли быть равнобокой трапеция, в которую вписана окружность?

Вычисляем

12.17. Найдите радиус окружности, вписанной в: а) правильный треугольник со стороной a; б) прямоугольный треугольник с катетами a, b; в) равнобедренный треугольник с основанием 10 и боковыми сторонами 13.

12.18. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб с диагоналями a и b.

Планируем

12.19. В треугольник вписана окружность. Как найти её радиус, если известны: а) две стороны и угол между ними; б) сторона и два угла?

Исследуем

12.20. У треугольника совпадают центры вписанной в него и описанной вокруг него окружностей. Что это за треугольник?

12.3. Замечательные точки треугольника. Окружность Эйлера

Центры окружностей, описанной вокруг треугольника и вписанной в него, — две первые *замечательные точки треугольника.* В 8 классе мы уже доказали, что три медианы треугольника проходят через одну точку (рис. 212). Эта точка — третья замечательная точка треугольника. Она является *центром масс* (*центром тяжести*) треугольника. Напомним *теорему о точке пересечения медиан.*

Теорема **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая медиана треугольника делится этой точкой в отношении 2 : 1 (считая от вершины треугольника).**

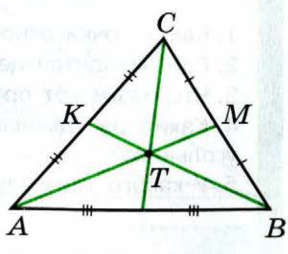


Рис. 212

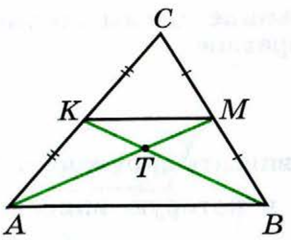


Рис. 213

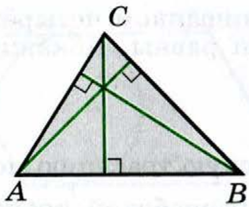


Рис. 214

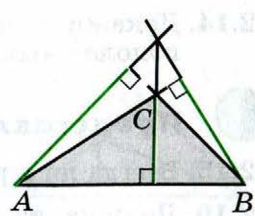


Рис. 215

Вспомните, глядя на рисунок 213, доказательство этой теоремы. Четвёртая замечательная точка треугольника — это точка, через которую проходят прямые, содержащие высоты треугольника (рис. 214 и 215). Её называют <u>**ортоцентром треугольника**</u>. Докажем что, **прямые, которые содержат высоты треугольника, проходят через одну точку.**

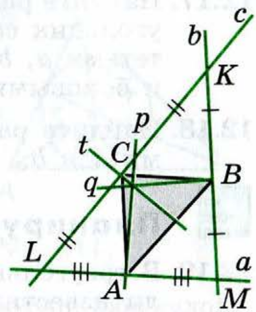


Рис. 216

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Через вершины треугольника ABC проведём прямые a, b, c, параллельные сторонам треугольника ABC (рис. 216).

Получится треугольник KLM с вершинами в точках пересечения прямых a, b, c. Точки A, B, C являются серединами сторон треугольника KLM, поскольку четырёхугольники $ABKC$, $ABCL$, $AMBC$ — параллелограммы. Следовательно, серединные перпендикуляры p, q, t к сторонам треугольника KLM являются прямыми, на которых лежат высоты треугольника ABC. По теореме об окружности, описанной вокруг треугольника (п. 12.1), эти серединные перпендикуляры проходят через одну точку. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Какие точки относят к замечательным точкам треугольника?
2. Где находится центр масс (центр тяжести) треугольника?
3. Что называют ортоцентром треугольника?
4. Какие из замечательных точек треугольника могут находиться вне треугольника?
5. У какого треугольника все его замечательные точки совпадают?

ЗАДАЧИ

Разбираемся в решении

12.21. ★ Докажите, что в каждом треугольнике ортоцентр, центр масс и центр описанной окружности лежат на одной прямой. (Эта прямая называется *прямой Эйлера*.)

Решение. Пусть точка H — середина стороны BC треугольника ABC (рис. 217), точка O — центр описанной окружности, точка P — ортоцентр.
Вспомним, что точка P является центром окружности, описанной вокруг треугольника KLM, серединами сторон которого являются вершины треугольника ABC (см. рис. 216). Треугольник KLM подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия 2. Значит, $AP = 2OH$ (см. рис. 217). Кроме того, отрезки AP и OH параллельны. Поэтому медиана AH пересекает отрезок PO в точке T, которая делит и эту медиану, и отрезок PO в отношении $2:1$. Следовательно, точка T — центр масс треугольника ABC. Задача решена. ■ ★

Решим ещё одну задачу, связанную с именем Леонарда Эйлера (1707—1783), великого математика, физика и астронома; швейцарец по рождению, он был членом Петербургской академии наук и работал в России в 1727—1741 и 1766—1783 гг.

12.22. ★ Докажите, что в любом треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности. Эту окружность называют **окружностью девяти точек** или **окружностью Эйлера**.

Решение. Сохраним все обозначения, введённые при решении предыдущей задачи. Пусть точка O_1 — середина от-

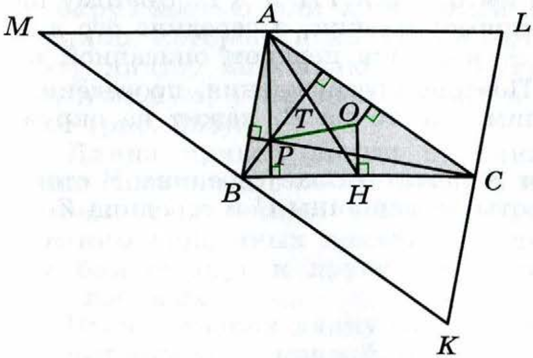


Рис. 217

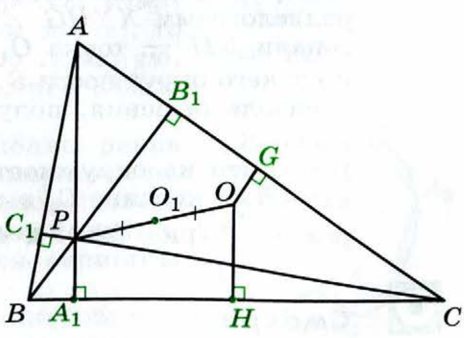


Рис. 218

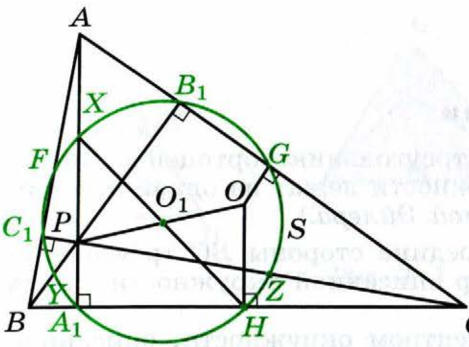


Рис. 219

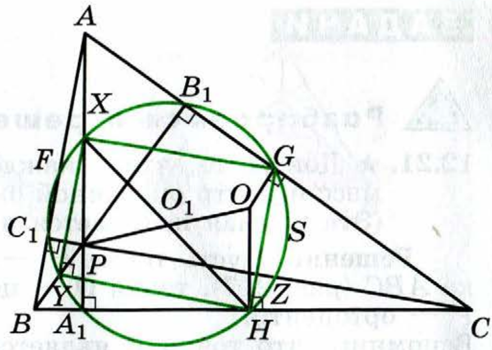


Рис. 220

резка PO и точка A_1 — основание высоты, проведённой из вершины A (рис. 218). Тогда $O_1A_1 = O_1H$. Прямая O_1H пересекает отрезок AP в точке X, которая является серединой AP (рис. 219). Кроме того, $O_1H = O_1X$. Следовательно, три точки H, A_1 и X равноудалены от точки O_1 — середины отрезка OP. Проведём окружность S через эти три точки. Её центр — точка O_1.

Покажем, что окружность S проходит через середину стороны AC — точку G, основание B_1 высоты из вершины B и точку Y — середину отрезка BP (см. рис. 219).

Отрезки GH и XY равны и параллельны (как средние линии треугольников ABC и ABP). Поэтому четырёхугольник $XYHG$ — параллелограмм. Покажем, что он прямоугольник. Отрезок YH параллелен отрезку CP (как средняя линия треугольника BCP). Отрезок XY параллелен AB (как средняя линия треугольника ABP). Но CP лежит на высоте к стороне AB, а потому CP и AB перпендикулярны. Значит, перпендикулярны и параллельные им отрезки YH и XY. Поэтому параллелограмм $XYHG$ — прямоугольник, а середина его диагонали XH — точка O_1 — является центром описанной вокруг него окружности S. Повторив рассуждения, проведённые в начале решения, получим, что точка B_1 лежит на окружности S.

Ясно, что на окружности S лежат также середина F стороны AB, основание C_1 высоты из вершины C и середина Z отрезка CP (рис. 220). ■ ★

Смотрим

12.23. На рисунке 218 найдите подобные треугольники.

Доказываем

12.24. Докажите, что если в треугольнике совпали какие-либо две из его четырёх замечательных точек, то этот треугольник равносторонний.

§ 13. Длина окружности и площадь круга

13.1. Измерение длины кривой. Длина окружности

Любую кривую линию можно представить себе как пройденный кем-то путь. Длину же пройденного пути, как вы знаете, можно измерить, расставив вдоль шоссе или железной дороги километровые или стометровые указатели, разметив флажками дистанцию кросса или лыжни, наконец, просто измерив шагами не слишком длинную тропинку (рис. 221). Во всех этих перечисленных примерах длину линии измеряют, складывая последовательно длины прямолинейных отрезков, концы которых лежат на измеряемой линии (рис. 222).

Рис. 221

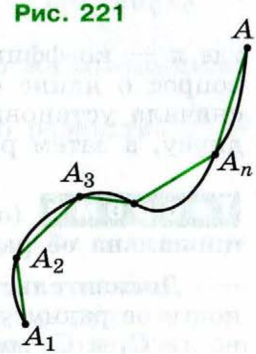


Рис. 222

Эти отрезки составляют ломаную, которую называют **ломаной, вписанной в** рассматриваемую **линию**. Длина ломаной равна сумме длин составляющих её отрезков, и она даёт более или менее точное значение длины кривой линии.

Если линия замкнута (например, является окружностью или дистанцией кросса, старт и финиш которого находятся в одном месте), то в эту линию вписывают замкнутую ломаную, т. е. ломаную, у которой начало и конец совпадают (рис. 223).

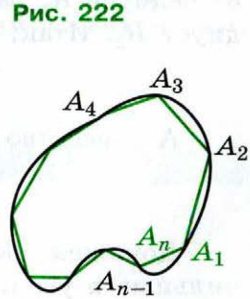


Рис. 223

Длина кривой линии приближённо равна длине вписанных в неё ломаных и измеряется их длинами тем точнее, чем чаще располагаются вершины вписанных ломаных на данной линии, чем ближе друг к другу становятся вершины этих ломаных.

Итак, измеряя длину кривой линии (обычно говорят короче — **кривой**, опуская слово *линии*), вписывают в неё последовательно ломаные, наибольшие из звеньев которых становятся сколь угодно малы. А **длиной кривой** называется такое число, от которого длины этих ломаных отличаются сколь угодно мало. При этом, конечно, длины ломаных измеряются в одной и той же единице измерения и длина кривой считается измеренной в той же единице.

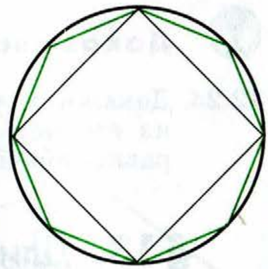


Рис. 224

Вычисляя длины кривых линий, можно брать любые вписанные в них ломаные, лишь бы вершины этих ломаных располагались на кривой линии достаточно часто. Для окружности таким свойством обладают границы правильных многоугольников, вписанных в эту окружность, когда число их сторон неограниченно увеличивается (рис. 224). Поэтому, измеряя длину окружности, рассматривают вписанные в неё правильные n-угольники и вычисляют их периметры.

В результате измерений, проводившихся с древнейших времён, было установлено, что длина окружности пропорциональна её радиусу (или, что всё равно, её диаметру). Это выражает давно известная вам формула для длины L окружности радиуса R:

$$L = 2\pi R, \tag{1}$$

где π — коэффициент пропорциональности между L и $2R$. И тогда вопрос о длине окружности сводится к вычислению числа π. Мы сначала установим пропорциональность длины окружности её радиусу, а затем расскажем о числе π.

Теорема (*о длине окружности*). **Длина окружности пропорциональна её радиусу.**

Доказательство. Доказать пропорциональность длины окружности ее радиусу — это значит доказать, что, какие бы две окружности C_1 и C_2 мы ни взяли, отношение длины L_1 окружности C_1 к её радиусу R_1 равно отношению длины L_2 окружности C_2 к её радиусу R_2. Итак, мы должны доказать равенство

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}. \tag{2}$$

А равенство (2) равносильно равенству

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{3}$$

Докажем равенство (3). Впишем в окружности C_1 и C_2 правильные n-угольники Q_1 и Q_2 (рис. 225).

Их стороны q_1 и q_2 вычисляются по формулам

$$q_1 = 2R_1 \sin\frac{180°}{n} \text{ и } q_2 = 2R_2 \sin\frac{180°}{n}. \qquad (4)$$

Поэтому их периметры P_1 и P_2 выражаются формулами

$$P_1 = 2nR_1 \sin\frac{180°}{n} \text{ и } P_2 = 2nR_2 \sin\frac{180°}{n}. \qquad (5)$$

Из формул (5) следует, что

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}. \qquad (6)$$

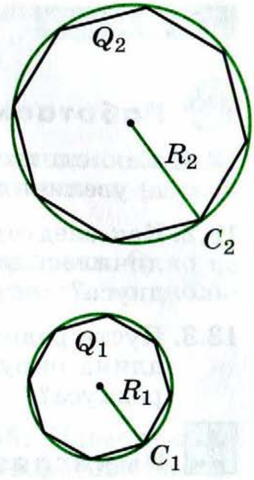


Рис. 225

Если неограниченно увеличивать число сторон правильных многоугольников Q_1 и Q_2 (например, удваивая его), то их периметры будут сколь угодно мало отличаться от длин L_1 и L_2 окружностей C_1 и C_2. Но тогда число $\frac{P_1}{P_2}$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $\frac{L_1}{L_2}$. Значит, учитывая формулу (6), можно заключить , что число $\frac{L_1}{L_2}$ сколь угодно мало отличается от числа $\frac{R_1}{R_2}$. Но это возможно лишь тогда, когда эти числа равны. Итак, справедливо равенство $\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$, а значит, и равенство (2). ■

Из этой теоремы следует, что отношение $\frac{L}{2R}$, т. е. отношение длины окружности к её диаметру, есть величина постоянная. Оно и обозначается буквой π. Введя такое обозначение, получаем формулу $L = 2\pi R$. Число π иррациональное. Оно будет появляться и в других формулах, выражающих длины, площади и объёмы фигур вращения. Более подробно о нём мы расскажем в пункте 13.4. Сейчас же лишь сообщим, что $\pi \approx 3{,}14$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как измеряют приближённо длины кривых линий?
2. В чём идея доказательства теоремы о длине окружности?
3. По какой формуле вычисляется длина окружности?

ЗАДАЧИ

Работаем с формулой

13.1. Как следует изменить радиус окружности, чтобы её длина: а) увеличилась в два раза; б) уменьшилась в три раза?

13.2. Как следует изменить радиус окружности, чтобы её длина увеличилась на 1 м? Зависит ли результат от первоначального радиуса?

13.3. Пусть радиус окружности увеличился на 1 м. Как изменилась длина окружности? Зависит ли результат от первоначального радиуса?

Вычисляем

13.4. Найдите отношение длин окружностей, описанной вокруг правильного многоугольника и вписанной в него, для: а) треугольника; б) шестиугольника; в) двенадцатиугольника; г) n-угольника.

13.5. Вычислите длину окружности, описанной вокруг: а) прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4; б) прямоугольного треугольника с катетами a и b; в) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b; г) прямоугольника со сторонами a и b; д) равнобокой трапеции с основаниями a и b и боковой стороной c; е) равнобедренного треугольника с основанием a и углом при вершине φ; ж) треугольника со сторонами 4, 5, 6.

13.6. Вычислите длину окружности, вписанной в: а) ромб со стороной a и острым углом α; б) прямоугольный треугольник с катетами a и b; в) равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b; г) равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α.

13.7. Вычислите ширину кольца между двумя концентрическими окружностями, имеющими длины L_1 и L_2. От чего зависит эта ширина?

13.8. Длины двух концентрических окружностей равны 1 и 3. Чему равна длина окружности, концентрической данным и равноудалённой от них?

Оцениваем

13.9. Найдите отношение (с точностью до сотых) длины окружности и периметра вписанного в неё правильного: а) шестиугольника; б) десятиугольника; в) двенадцатиугольника; г) двадцатиугольника.

Исследуем

13.10. Колесо катится по земле. Какая существует зависимость между его радиусом, числом сделанных им оборотов и длиной пройденного пути?

13.11. По дороге едет повозка с колёсами разных радиусов. Одно из них крутится быстрее. Какое? Почему? Как узнать, во сколько раз быстрее оно крутится?

Применяем геометрию

13.12. Два зубчатых колеса сцеплены между собой. Известны их радиусы. а) Пусть первое из них сделало n оборотов. Сколько оборотов сделало второе? б) Пусть есть третье колесо известного радиуса, которое сцеплено с одним из данных колёс. Сколько оборотов оно сделало? Что интересно в полученном результате? в) Представьте, что третье колесо сцеплено с двумя данными колёсами. Сколько оборотов оно сделало?

13.13. а) Метр приблизительно равен одной сорокамиллионной длины земного меридиана. Найдите радиус земного шара в метрах. б) Во сколько раз длина земного экватора больше длины шестидесятой параллели? Изменится ли полученный результат, если такую задачу решать на другой планете? в) Представьте себе, что Землю обтянули верёвкой по экватору, а потом её длину увеличили на 1 м и получили окружность, концентрическую с экватором. Пролезет ли в образовавшийся зазор кисть руки?

13.2. Длина дуги окружности

Зная, как вычисляется длина всей окружности, легко вывести формулу для вычисления длины дуги окружности. Центральному углу в 1° соответствует дуга, длина которой равна $\frac{1}{360}$ части длины окружности, т. е. длина этой дуги равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Поэтому длина L дуги, имеющей градусную меру α°, имеет длину

$$L = \pi R \frac{\alpha}{180}. \qquad (7)$$

ЗАДАЧИ

Представляем

13.14. Из точки проводятся две касательные к окружности. Объясните, почему при удалении точки от окружности длина ближайшей к этой точке дуги окружности увеличивается.

Планируем

13.15. Отрезки CA и CB касаются некоторой окружности в точках A и B. Как найти длину дуги AB, зная длину CA и угол ACB? Вычислите её, если $CA = 1$ и $\angle ACB = 120°$.

13.16. Как найти длину зелёной линии на рисунке 226, зная радиус окружностей?

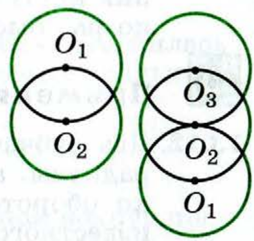


Рис. 226

Вычисляем

13.17. Чему равна длина дуги окружности радиуса R, если её градусная мера равна: а) 30°; б) 75°; в) 120°; г) 135°; д) 240°; е) 315°?

13.18. В окружности радиуса R проведена хорда длиной R. Чему равны длины стягиваемых ею дуг?

13.19. Какова градусная мера дуги окружности радиуса 1, длина которой равна: а) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{2\pi}{3}$; д) $\frac{7\pi}{4}$; е) $\frac{11\pi}{6}$; ж) 1?

13.20. Внутри окружности радиуса R расположены три равные окружности, касающиеся друг друга и данной окружности. Найдите их длины и длины дуг, на которые они разбиваются точками касания.

13.21. На окружности длиной L взята дуга длиной L_1. Какова её градусная мера?

13.22. В угол φ вписана окружность. В каком отношении разделилась её длина точками касания? Как изменяется это отношение при изменении угла φ? При каком угле φ это отношение равно 2?

Исследуем

13.23. Нарисуйте отрезок AB. Вы хотите наиболее коротким путём попасть из A в B, двигаясь только по полуокружностям, диаметры которых лежат на AB. При этом соседние диаметры не накладываются друг на друга. Какой вы выберете путь?

13.24. Часы показывают 15.00. Как вычислить путь, который пройдёт конец минутной стрелки, пока она догонит часовую?

13.25. Круглая площадка разбита дорожками на секторы (рис. 227). Вы находитесь на пересечении границы площадки и дорожки, а ваш товарищ находится в другой такой же точке. Как вам побыстрее добраться до него? (Ходить можно только по дорожкам и вокруг площадки.)

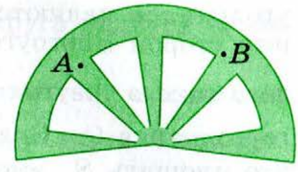


Рис. 227

13.3. Измерение площади плоской фигуры. Площадь круга

Вы знаете, как вычисляются площади многоугольных фигур. Площадь $S(F)$ немногоугольной плоской фигуры F можно вычислить, приближая F многоугольными фигурами. Если многоугольная фигура M содержит фигуру F, то её площадь $S(M) \geqslant S(F)$ (рис. 228).

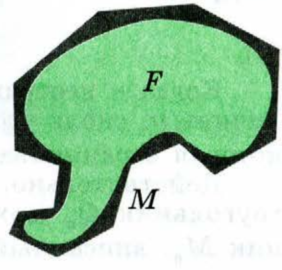


Рис. 228

Следовательно, $S(M)$ будет приближённым значением для $S(F)$ с избытком. Для фигур, которые встречаются на практике, а также для тех фигур, которые мы изучаем, подобрав для приближения соответствующую многоугольную фигуру M, этот избыток, т. е. разность $S(M) - S(F)$, удаётся сделать сколь угодно малым. Тем самым площадь $S(F)$ можно вычислять с любой нужной точностью.

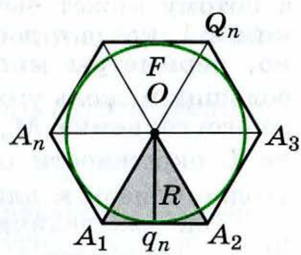


Рис. 229

Формула для вычисления площади S круга F радиуса R вам, наверное, знакома. Напомним её:

$$S = \pi R^2. \tag{8}$$

□ Выведем эту формулу. Измерить площадь круга проще всего, если приближать круг правильными многоугольниками, описанными вокруг круга: точки касания сторон таких многоугольников разбивают окружность круга на равные дуги.

Опишем вокруг круга F правильный n-угольник Q_n (рис. 229).

Отрезки, соединяющие центр O круга F с вершинами многоугольника Q_n, разбивают Q_n на n равнобедренных треугольников с основаниями на сторонах многоугольника Q_n. Высотами этих треугольников являются радиусы круга F, проведённые в точки касания сторон многоугольника Q_n и круга F. Поэтому площадь каждого такого треугольника равна $\frac{1}{2}Rq_n$, где q_n — длина стороны многоугольника Q_n. Складывая площади всех треугольников, получаем, что площадь S_n многоугольника Q_n выражается формулой

$$S_n = \frac{n}{2}q_nR,$$

т. е.

$$S_n = \frac{1}{2}p_nR,$$

где p_n — периметр многоугольника Q_n. Из последнего равенства следует, что

$$\frac{S_n}{P_n} = \frac{R}{2}. \qquad (9)$$

Когда n неограниченно возрастает (например, удваивается), величина p_n сколь угодно мало отличается от длины L окружности G, которая ограничивает круг F.

Действительно, гомотетией с центром O многоугольник Q_n можно перевести в многоугольник M_n, вписанный в окружность G (рис. 230).

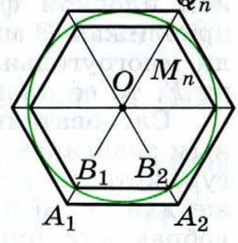


Рис. 230

Коэффициент этой гомотетии равен $\cos\frac{180°}{n}$, а потому может быть сделан сколь угодно близким к 1, когда n достаточно велико. Следовательно, периметры многоугольников Q_n и M_n при больших n сколь угодно близки. Так как периметр многоугольника M_n сколь угодно близок к длине L окружности G, то и периметр p_n многоугольника Q_n сколь угодно близок к длине L окружности G, т. е. к $2\pi R$.

Так как величина S_n сколь угодно близка к площади S круга F, а периметр p_n — к $2\pi R$, то их отношение $S_n : p_n$ сколь угодно близко к числу $\frac{S}{2\pi R}$. Но, согласно равенству (9), их отношение сколь угодно близко и к числу $\frac{R}{2}$. Следовательно, два числа $\frac{S}{2\pi R}$ и $\frac{R}{2}$ сколь угодно близки. А это возможно лишь тогда, когда они равны. Поэтому $\frac{S}{2\pi R} = \frac{R}{2}$. Из этого равенства и вытекает, что $S = \pi R^2$. ■

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема (*о площади круга*). **Площадь S круга радиуса R выражается формулой $S = \pi R^2$.**

Площадь сектора с центральным углом $1°$ составляет $\frac{1}{360}$-ю часть площади круга, а потому для круга радиуса R она равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Следовательно, площадь сектора с центральным углом $\alpha°$ в круге радиуса R вычисляется по формуле

$$S_{сект} = \frac{\pi\alpha}{360}R^2. \qquad (10)$$

Вопросы для самоконтроля

1. По какой формуле вычисляется площадь круга?
2. По какой формуле вычисляется площадь сектора?
3. Как вычислить площадь сегмента?

ЗАДАЧИ

Работаем с формулой

13.26. Выразите площадь круга через длину его окружности.

13.27. Выразите площадь круга через его диаметр.

13.28. Выразите площади сектора и сегмента круга радиуса R, имеющего дугу $2\alpha°$.

13.29. Выразите площадь сектора через длину его дуги и радиус.

Планируем

13.30. Как вычислить площадь сектора, если известны: а) радиус круга и длина его дуги; б) длина его дуги и центральный угол; в) длина его границы и центральный угол?

13.31. В круге известного радиуса проведена хорда. Известен также угол, под которым она видна из центра. Как найти площадь полученных сегментов круга?

13.32. Дан круг. Как его разбить концентрическими окружностями на 10 равновеликих частей?

Вычисляем

13.33. Вычислите площадь круга, описанного вокруг: а) равностороннего треугольника со стороной a; б) равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a; в) прямоугольного треугольника с катетами a и b; г) равнобедренного треугольника с боковой стороной a и углом при вершине 2α.

13.34. Вычислите площади кругов, которые вписаны в треугольники, перечисленные в задаче 13.33.

13.35. Внутри данного круга проходит окружность, которая разбивает его на равновеликие части. Каково отношение радиусов большой и малой окружностей?

Разбираемся в решении

13.36. Кольцо F имеет краями две концентрические окружности. Площадь кольца — S, ширина кольца — d, а L — длина *средней линии кольца* — окружности, равноудалённой от краёв кольца и концентрической с ними. Какая связь между ними? Что она напоминает?

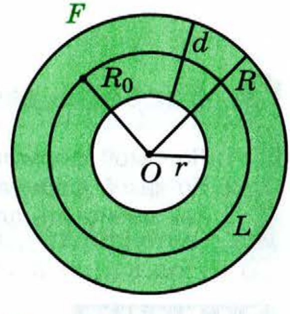


Рис. 231

Решение. Пусть R — радиус большего края кольца, а r — радиус меньшего края кольца (рис. 231).
Тогда $d = R - r$, а $S = \pi(R^2 - r^2)$. Кроме того, радиус R_0 средней линии кольца равен полусумме R и r:

$$R_0 = \frac{1}{2}(R + r). \text{ (Почему?)}$$

Поэтому $L = 2\pi R_0 = \pi(R + r)$. Следовательно,

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r) = Ld. \qquad (11)$$

Формула $S = Ld$, во-первых, напоминает о формуле для вычисления площади прямоугольника: кольцо F равновелико прямоугольнику с измерениями L и d. Во-вторых, она напоминает формулу для вычисления площади трапеции, площадь которой равна произведению средней линии и высоты трапеции. И площадь треугольника равна произведению его средней линии и соответствующей высоты.

Оцениваем

13.37. В круге радиуса R проведена концентрическая с краем круга окружность. Какую часть составляет площадь полученного кольца от площади круга, если радиус проведённой окружности равен: а) $0{,}5R$; б) $0{,}9R$?

Исследуем

13.38. Квадрат и круг имеют одинаковую длину границы. Какая из этих фигур имеет бо́льшую площадь?

13.39. Правильный шестиугольник и круг имеют одинаковую длину границы. Какая из этих фигур имеет большую площадь?

13.40. Квадрат и круг равновелики. У какой из этих фигур длиннее граница?

13.41. Правильный шестиугольник и круг равновелики. У какой из этих фигур длиннее граница?

13.42. Каково должно быть число сторон правильного многоугольника, вписанного в круг, чтобы его площадь составляла от площади круга не менее: а) 90%; б) 95%?

Применяем геометрию

13.43. Почему для передачи газа на большие расстояния выгоднее использовать трубы большого диаметра?

13.4. Число π

Во всех формулах, связанных с измерением круга и его частей, присутствует множитель π. Число π появилось как отношение длины окружности к её диаметру. Его можно определить и как отношение площади круга к площади квадрата со стороной, равной радиусу круга. Ясно, что при решении очень многих практических задач важно знать, чему равны эти отношения. Доказано (сравнительно недавно, в конце XVIII в.), что π — число иррациональное. Следует заметить, что на протяжении многих столетий математики разных стран пытались выразить π рациональным числом. Вычислять π с любой точностью можно, находя периметры правильных многоугольников со всё большим числом сторон, вписанных в данную окружность. Отношения периметров этих многоугольников к диаметру окружности и дают всё более точные значения π.

У многих древних народов (например, в Вавилоне, в Китае и даже в Древнем Риме) при вычислении длины окружности и площади круга использовали весьма грубое приближение числа π, равное 3. Но в Древнем Египте уже за 18 веков до н. э. использовали при решении этих задач весьма хорошее приближённое значение для π:

$$\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605.$$

Спустя 1500 лет великий Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.) в своём сочинении «Об измерении круга» дал такие приближения для π: *периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых.* Этот результат Архимед получил, выразив через диаметр окружности периметр вписанного в неё правильного 96-угольника. Результат Архимеда даёт приближённое значение для π, равное 3,14.

Индийский математик и астроном Ариабхата (476 г. — ок. 550 г.) нашёл ещё более точное значение π, равное 3,1416. Работавший в Самарканде в знаменитой обсерватории Улугбека математик ал-Каши дал приближённое значение для π с 16 верными знаками. Он рассматривал вписанный в окружность правильный многоугольник с 800 335 168 сторонами. Леонард Эйлер (1707—1783), применяя методы высшей математики, нашёл для π приближение с 153 верными знаками. Современные ЭВМ могут находить приближения π с десятками тысяч верных знаков, но, конечно, для практики такие приближения не нужны, достаточно семи знаков.

Обозначение буквой π отношения длины окружности к её диаметру ввёл Л. Эйлер. Буква π — это первая буква в греческом слове περιφερεια — периферия, что означает «окружность».

В конце XIX в. было доказано, что π не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами (такие числа называют *трансцендентными*).

13.5. Архимед

Именем этого гениального греческого учёного названы и открытые им законы механики, и придуманные им машины («винт Архимеда» для подъёма воды), и один из классов многогранников в геометрии. Оно окружено легендами, многие из которых вам, наверное, известны. И восторженное восклицание «Эврика!» («Нашёл!») учёного, решившего трудную проблему (вспомните закон Архимеда о действии выталкивающей силы на тело, погружённое в жидкость, и связанную с ним задачу о золоте в царской короне), и гордое заявление «Дайте мне точку опоры — и я поверну Землю!» после открытия закона рычага, и даже последние слова «Не трогай моих чертежей!», сказанные римскому солдату, убившему его, — это отдельные, но яркие детали, характеризующие Архимеда. Конечно, более полную характеристику Архимеда дают его работы по математике, механике, астрономии, его инженерные изобретения. Перечислим названия некоторых из них: «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «Измерение круга», «О равновесии плоских фигур или о центрах тяжести плоских фигур», «О плавающих телах», «Об устройстве небесной сферы», «О многогранниках», «О построении круга, разделённого на семь равных частей». Уже это перечисление (а Архимеду принадлежат и многие другие работы) показывает широту интересов Архимеда. О результатах Архимеда, связанных с измерением круга и шара, мы уже говорили. Расскажем ещё о трёх геометрических работах Архимеда.

Архимед в своём сочинении «О шаре и цилиндре» измерял объём шара и площадь его поверхности. Вот как формулировал Архимед доказанные им теоремы: *для всякого шара цилиндр, имеющий основанием большой круг этого шара, а высотой прямую, равную диаметру шара, и сам будет в полтора раза больше этого шара, и поверхность его тоже в полтора раза больше поверхности шара* (см. второй форзац). Из этих теорем вытекает, что объем шара $V = \frac{3}{4}\pi R^3$, а площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$ (здесь R — радиус шара).

В работе «О построении круга, разделённого на семь равных частей» речь идёт о построении правильного семиугольника, что невозможно сделать с помощью циркуля и линейки. Но Архимед строит его, привлекая другие средства.

В сочинении «О спиралях» Архимед исследует линию, которую опишет движущаяся равномерно по некоторой прямой точка, когда сама прямая равномерно вращается вокруг начального положения движущейся точки (см. второй форзац). Её называют **спиралью Архимеда**.

Используя эту спираль, Архимед строит отрезок, длина которого равна длине окружности данного радиуса. Циркулем и линейкой такую задачу решить нельзя.

В сочинении «О многогранниках» речь идёт о тринадцати выпуклых многогранниках, у которых все грани — правильные многоугольники (но не все одинаковые) и в каждой вершине которых сходятся одинаковые наборы граней. Эти многогранники называют **полуправильными многогранниками** или **архимедовыми телами**.

Архимед жил в III в. до н. э. в городе Сиракузы на острове Сицилия, был знатным человеком, другом сиракузского царя Гиерона. Он вёл переписку, обсуждая научные проблемы, с учёными Александрии. Но Архимеду пришлось тратить свой гений не только на решение чисто научных задач, но и на изобретение оборонительных военных орудий для защиты родного города от осаждавших его римлян. Об этих орудиях, наводивших ужас на осаждавших, рассказывают многие древние историки (Полибий, Тит Ливий, Плутарх). Эти историки о самом Архимеде пишут в самых восторженных тонах. Вот, например, слова Плутарха: «Архимед имел возвышенную душу и глубокий ум, и, обладая громадными богатствами геометрических теорий, он не хотел оставить ни одного сочинения относительно построения тех машин, которые доставили ему славу знания, не только доступного человеку, но почти божественного... Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубоких задач, которые были решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед». Это восхищение и удивление гением Архимеда сохранилось и поныне, спустя более двух тысяч лет.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

Планируем

III.1. а) В треугольник вписана окружность. Как узнать, в каком отношении разделилась длина этой окружности точками касания? б) Решите аналогичную задачу для четырёхугольника. в) Решите аналогичную задачу для n-угольника.

III.2. Как построить круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов?

Находим величину

III.3. В круг радиуса R вписаны три равных круга, касающиеся друг друга. Найдите их радиус.

III.4. На диаметре полукруга радиуса R построен правильный треугольник с той же стороны от диаметра, что и полукруг. Найдите площадь части треугольника вне полукруга.

Доказываем

III.5. Центр окружности совпадает с центром правильного треугольника, а сама она пересекает стороны треугольника. Докажите, что полученные при этом хорды будут равны.

III.6. Докажите, что прямые, содержащие общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей, проходят через одну точку или параллельны.

III.7. Докажите, что произведение диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон (*теорема Птолемея*). (Клавдий Птолемей (ок. 87—165 гг.) — знаменитый древнегреческий астроном и математик, живший в Александрии.)

Исследуем

III.8. Вокруг равностороннего треугольника описана окружность. По ней движется точка. В любой момент времени известны расстояния от неё до двух вершин треугольника. Сможете ли вы найти расстояние от неё до третьей вершины треугольника?

Строим

III.9. Постройте окружность, касающуюся трёх заданных прямых.

III.10. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных прямых.

Применяем компьютер

III.11. Концы отрезка постоянной длины находятся на двух различных сторонах прямого угла. Найдите траекторию середины отрезка, если отрезок занимает все возможные положения.

Указание: проведите компьютерный эксперимент, отметив середину отрезка и воспользовавшись командой «След точки». Для обоснования ответа соедините середину отрезка с вершиной угла.

III.12. В окружность вписали пятиконечную звезду (не обязательно правильную). Проверьте с помощью компьютерного эксперимента, что сумма углов в вершинах на концах звезды не меняется, если менять положение вершин на окружности. Попробуйте обосновать ответ.

III.13. Даны две точки A и B. Изобразите на плоскости множество точек C, таких, что $AB : CB = 2 : 1$.

Указание: для построения такого множества постройте рядом с точками произвольный отрезок d и воспользуйтесь командой «Построение середины отрезка». Затем на стороне AB постройте треугольник ABC с длинами сторон d и $\frac{d}{2}$. Изменяя длину отрезка d и воспользовавшись командой «След точки C», получим искомое геометрическое место точек. Для обоснования ответа проведите биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине C и воспользуйтесь теоремой о делении отрезков на прямой, содержащей основание треугольника, биссектрисами внутреннего и внешнего углов.

Заключение

1. Аксиоматический метод. В самом начале курса, во Введении в учебнике «Геометрия, 7» было сказано, что в геометрии только начальные сведения берутся из наблюдения и практики, они наглядны и очевидны. Все её дальнейшие утверждения обосновываются путём логических рассуждений. Именно поэтому великий английский учёный Исаак Ньютон (1643—1727) сказал: *геометрия за то и прославляется, что, заимствовав извне столь мало основных положений, она столь многого достигает.*

Так мы и поступали, когда доказывали теоремы, решали задачи. Однако в наших доказательствах мы не только пользовались чисто логическими рассуждениями, но и нередко опирались на очевидность. Например, в аксиоме об откладывании угла говорится, что угол можно отложить в заданную полуплоскость. Но определения понятия *полуплоскость* не было дано — мы полагались на очевидность.

Обычное определение состоит в том, что одно понятие разъясняется с помощью других, которые считаются известными. Допустим, эти известные понятия тоже можно определить через другие. Но так продолжать без конца невозможно. Мы придём к понятиям, определить которые через другие уже нельзя; их можно только пояснить, показать на примерах. Сами же эти понятия будут служить для определения других понятий. Они в этом смысле будут исходными — основными.

Итак, нужно выявить **основные понятия** изучаемой нами геометрии, а остальные определить через них.

Однако этого ещё недостаточно. Доказывая какое-нибудь утверждение, теорему, мы опираемся на некоторые предпосылки, на то, что уже считается известным. Но эти предпосылки тоже нужно обосновывать и т. д. Так продолжать до бесконечности невозможно, и мы придём к предпосылкам, которые должны быть приняты за исходные. Эти исходные положения — **аксиомы** — принимаются без доказательства и составляют основу для доказательства теорем. Мы сформулировали в начале курса ряд аксиом. Но исчерпывают ли они всё то, чем мы на самом деле пользовались в наших выводах?

Так, мы предполагали, что данным отрезком e, принятым за масштабную единицу, можно измерить любой отрезок (с заранее указанной точностью), откладывая на нём отрезки, равные e, или их доли $\left(\frac{e}{2}, \frac{e}{4}, \ldots\right)$. Однако можно мыслить, что существуют столь большие отрезки, что, сколько раз на таком отрезке ни откладывать отрезки, равные e, всё равно будет оставаться остаток, больший e. Ясно, что такого быть не может. Но для логических выводов нужна явная формулировка, и надо либо доказать утверждение, либо принять за аксиому, что такое невозможно. Необходимость такой аксиомы понял Архимед и сформулировал её в своей работе «О шаре и цилиндре»: *для каждых двух отрезков AB и PQ существует отрезок AC, содержащий AB и составленный из отрезков, равных PQ.*

В п. 1.1 учебника «Геометрия, 7», начиная разговор об отрезках, после формулировки первого постулата Евклида о том, что **каждые две точки соединяет отрезок, и притом только один,** мы сказали: эти две точки называются **концами** отрезка. Мы не подчеркнули это как особую аксиому. Но при полном изложении и это утверждение нужно высказать как аксиому, отражающую одно из основных свойств отрезка.

Итак, задача состоит в том, чтобы выделить основные понятия, сформулировать как аксиомы все положения, которые принимаются без доказательств, и тем самым дать основу для строго логического построения планиметрии — для определения других её понятий и доказательства теорем. В этом смысле и говорят, что список основных понятий и формулировки аксиом составляют **основания планиметрии.**

После того как выделены основные понятия и сформулированы аксиомы теории (в нашем случае планиметрии), все её дальнейшие утверждения выводятся чисто логическим путём. Такой способ построения научной теории называется **аксиоматическим методом.** Впервые он появился в геометрии в Древней Греции (вспомним «Начала» Евклида), а в настоящее время его применяют во всех теоретических науках, прежде всего в математике. Аксиоматическим методом излагает И. Ньютон своё главное сочинение «Математические начала натуральной философии», и об этом методе он и говорит в приведённом ранее его высказывании о геометрии.

Самым известным сочинением, излагающим геометрию аксиоматическим методом в современном его понимании, стал труд немецкого математика Давида Гильберта (1862—1943) «Основания геометрии», вышедший в 1899 г. Краткое (всего два абзаца) введение в этой книге Гильберт начинает так:

«Геометрия, так же как и арифметика, требует для своего построения только немногих простых основных положений. Эти основные положения называются аксиомами геометрии. Установление аксиом геометрии и исследование их взаимоотношений — это задача, которая со времён Евклида являлась темой многочисленных прекрасных произведений математической литературы».

Замечание. Принимать за основные можно разные понятия, так же как и за аксиомы можно принимать разные утверждения планиметрии. Получаются разные её основания. Но все они дают одни и те же результаты. Примеры таких различных построений планиметрии вы получите, если сравните, например, разные школьные учебники геометрии.

2. Основные понятия и определения. Основные понятия, которые выделяют при строгом построении геометрии, делятся на два вида: одни обозначают **основные объекты**, которыми занимается геометрия, другие обозначают **основные отношения** между ними. Так, точка и отрезок — это основные объекты, а то, что точка принадлежит отрезку, — это отношение между ними. За основные объекты мы принимаем следующие: 1) **точки;** 2) **отрезки;** 3) **фигуры.** При этом точки и отрезки считаются частными видами фигур.

За основные отношения между этими объектами принимаются: 1) **точка принадлежит фигуре,** в частности отрезку; 2) **точка является концом отрезка;** 3) **два отрезка равны.**

Отношение равенства отрезков служит основным понятием, оно не определяется. Наглядно оно поясняется наложением одного отрезка на другой, но это не определение. Если бы мы сказали, что отрезки называются равными, если один можно наложить на другой, то надо было бы либо определить, что значит наложить, либо принять наложение за основное понятие.

Теперь напомним несколько известных определений, выражая их через основные понятия.

1. Фигура называется **объединением** некоторых данных фигур, если ей принадлежат все точки этих фигур и никакие другие.

2. **Прямой** AB называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков, содержащих точки A и B.

3. **Лучом** AB называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков с концом A, содержащих точку B.

4. **Полуплоскостью,** ограниченной прямой a, называется фигура, обладающая следующими свойствами: 1) она содержит прямую a, но не совпадает с ней; 2) если точки A, B принадлежат полуплоскости, но не прямой a, то отрезок AB не имеет общих точек с a; 3) если же точка A принадлежит полуплоскости, а B нет, то отрезок AB имеет с прямой a общую точку.

Определения имеют смысл не сами по себе, а лишь в связи с утверждениями, устанавливающими, что то, чему дано определение, существует. И это либо утверждается в аксиомах, либо должно быть доказано из аксиом. Поэтому в аксиомах говорится о существовании самих основных объектов и отношений между ними.

3. Аксиоматика планиметрии. Аксиоматикой называют перечень основных понятий и аксиом. Обычно говорят не перечень, а **система аксиом,** так как аксиомы связаны друг с другом и образуют в этом смысле известную систему.

Аксиомы планиметрии делятся на несколько групп. Сформулируем их. Римской цифрой обозначается номер группы, а арабской — номер аксиомы в группе (если их больше одной).

I. Аксиомы связи отрезков и точек.

I.1. Существуют по крайней мере две точки.

I.2. Для каждых двух точек существует, и притом единственный, отрезок, концами которого являются данные точки.

I.3. У каждого отрезка есть два и только два конца, а также существуют другие принадлежащие ему точки.

О точках отрезка, отличных от его концов, говорят, что они лежат **внутри** этого отрезка.

I.4. Точка C, лежащая внутри отрезка AB, разбивает его на два отрезка AC и CB, т. е. AB есть объединение отрезков AC и CB, которые имеют лишь одну общую точку C.

I.5. Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов, т. е. для каждого отрезка AB существует содержащий его отрезок AC с концом C, отличным от B.

I.6. Объединение двух отрезков, имеющих две общие точки, является отрезком; его концами служат два из концов этих отрезков.

Аксиомы I.2 и I.5 — это первый и второй постулаты Евклида. О наглядно очевидных утверждениях остальных аксиом группы I речь идёт в п. 1.1 учебника «Геометрия, 7».

II. Аксиомы равенства отрезков.

II.1. Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны.

II.2. На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному отрезку, и притом только один.

II.3. Если точка C лежит внутри отрезка AB, а точка C_1 лежит внутри отрезка A_1B_1 и выполняются равенства $AC = A_1C_1$ и $CB = C_1B_1$, то $AB = A_1B_1$.

II.4. Для каждых двух отрезков AB и PQ существует отрезок AC, содержащий AB и составленный из отрезков, равных PQ (аксиома Архимеда).

Три первые аксиомы второй группы были сформулированы в § 1 учебника «Геометрия, 7». Единственная аксиома третьей группы была сформулирована создателем теории множеств немецким математиком Георгом Кантором (1845—1918).

III. Аксиома непрерывности. Если дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... и отрезок A_1B_1 содержит отрезок A_2B_2, отрезок A_2B_2 содержит отрезок A_3B_3 и вообще отрезок A_nB_n содержит отрезок $A_{n+1}B_{n+1}$, то существует точка C, принадлежащая всем этим отрезкам.

Аксиомы первых трёх групп можно назвать *линейными*, так как в них не присутствует представление о плоскости: они могли бы относиться к точкам и отрезкам, лежащим на одной прямой. Отметим, что линейные аксиомы позволяют обосновать измерение длин отрезков и ввести координату на любой прямой. Без аксиомы Кантора не доказать очевидные утверждения о пересечении двух окружностей, которые постоянно используются при решении задач на построение.

Аксиом о фигурах, не лежащих на одной прямой, всего четыре. В четвёртой группе три аксиомы. Две из них (об углах) вам знакомы.

IV. Аксиомы плоскости.

IV.1. Каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, т. е. в объединении эти полуплоскости дают всю плоскость, а их пересечением является данная прямая.

IV.2. Соответственные хорды равных углов равны.

IV.3. От каждого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол, равный данному, и притом только один.

Последняя группа содержит лишь одну аксиому параллельности Евклида.

V. Аксиома параллельности Евклида. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая данную прямую.

4. Об уровне строгости школьного курса геометрии. После того как аксиоматика евклидовой планиметрии предъявлена, следовало бы вывести хотя бы основные теоремы планиметрии, опираясь на эту систему аксиом и не используя соображения наглядности. Конечно, в рамках школьного курса это невозможно, но в университетских курсах геометрии это делается. Например, такое построение планиметрии выполнено в книгах А. Д. Александрова «Основания геометрии» (М.: Наука, 1987), а также А. Д. Александрова и Н. Ю. Нецветаева «Геометрия» (М.: Наука, 1990). Но даже в университетских курсах не даются доказательства для многих наглядно очевидных утверждений.

5. Богатство геометрии. Своеобразие геометрии, выделяющее её среди других разделов математики, да и всех наук вообще, заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия по своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют эти две составляющих: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод. Там, где нет одной из этих двух составляющих, нет и подлинной геометрии.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, строгая логика — привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины — «лёд и пламень не столь различны меж собой». Так геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так её и надо изучать: соединяя живость воображения с логикой, наглядные картины со строгими формулировками и доказательствами.

Древнейшая из наук — геометрия развивается и обогащается новыми методами и результатами уже более двух с половиной тысячелетий. С её историей мы знакомили вас в этом учебнике: вы узнали о самых великих геометрах Древней Греции — Фалесе, Пифагоре, Евклиде, Архимеде, об их результатах. В Древней Греции была создана классическая элементарная геометрия. А в истории такого важного раздела геометрии, как тригонометрия, мы встречаемся и с главным произведением знаменитого астронома древности Птолемея (II в.), и с открытиями средневековых учёных Персии (Ирана) и Средней Азии, и с трудами крупнейшего учёного XVIII в. Леонарда Эйлера. Новые идеи и методы обогатили геометрию и в XVII в. (метод координат Р. Декарта и П. Ферма), и в XIX в. (векторный метод и теория преобразований).

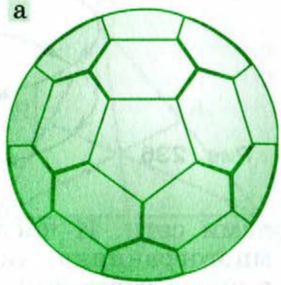
Кардинальным переворотом не только в геометрии, но и во всей математике стало открытие Н. И. Лобачевским, К. Гауссом и Я. Бойяи неевклидовой геометрии (об этом мы уже рассказывали в 7 классе). Если до середины XIX в. была лишь одна геометрия — евклидова, основы которой изложены в «Началах» Евклида, то в середине этого века наряду с геометрией Евклида появилась ещё одна геометрия — *геометрия Лобачевского*. Затем возникли и другие геометрии: отделилась от евклидовой геометрии *проективная геометрия*, истоки которой связаны с изображением на плоскости пространственных фигур, сложилась *многомерная геометрия*, точки и векторы в которой имеют любое число координат, и ещё многие геометрии. Из науки о фигурах в одном трёхмерном евклидовом пространстве геометрия за какие-нибудь 40—50 лет превратилась в совокупность разнообразных теорий, лишь в чём-то сходных со своей прародительницей — геометрией Евклида.

Но в последние два-три столетия геометрия обогащалась не только такими теориями, которые применяют достаточно сложные аналитические методы. Геометры стали замечать и исследовать факты, казалось бы, лежащие на поверхности, — их могли бы увидеть и изучить и во времена Пифагора, но не увидели! Например, если вы у любого выпуклого многогранника найдёте сумму числа вершин и граней В + Г, а затем вычтете из неё число рёбер Р, то получится, что

$$\text{В} + \text{Г} - \text{Р} = 2! \qquad (1)$$

Проверьте равенство (1) на призмах, пирамидах, правильных и полуправильных многогранниках. Доказал равенство (1) Эйлер средствами классической элементарной геометрии, и эта теорема Эйлера стала одним из первых результатов ещё одной ветви геометрии — *топологии* (сейчас, по существу, она отделилась от геометрии и является самостоятельным разделом современной математики). В топологии изучают те свойства фигур, которые сохраняются (инвариантны) при взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях фигур. Ясно, что если мы «раздуем» один из архимедовых многогранников (рис. 232, а) до сферической поверхности футбольного мяча (рис. 232, б), то грани многогранника станут областями на сфере — кусками покрышки мяча, его рёбра станут сетью дуг на сфере, по которым сшиты куски покрышки, а вершины станут точками на сфере, в которых сходится более двух дуг сети, — уз-

а



б

Рис. 232

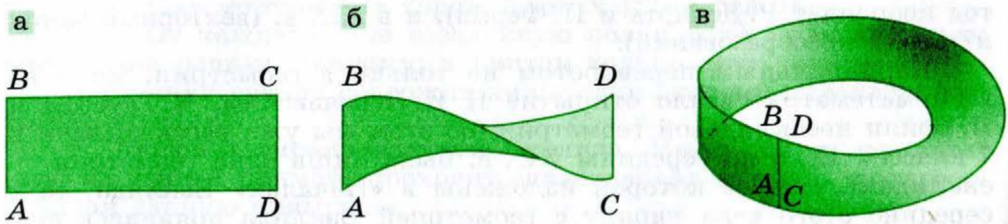


Рис. 233

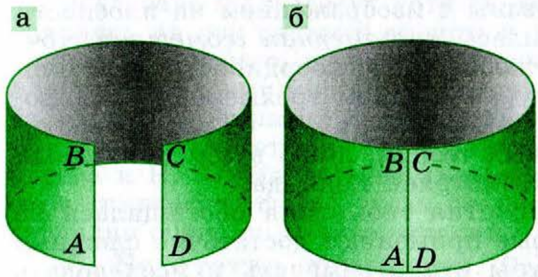


Рис. 234

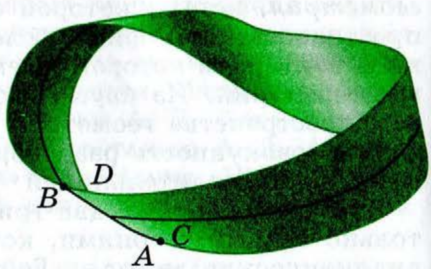


Рис. 235

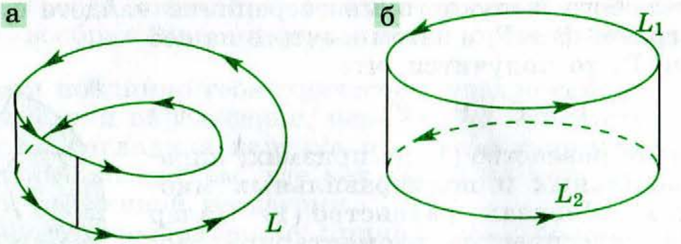


Рис. 236

лами сети. И число таких областей на сфере равно числу граней многогранника, число дуг сети равно числу рёбер многогранника, а число узлов сети равно числу вершин многогранника. Равенство (1) верно не только для выпуклых многогранников, но и для тех сетей на сфере, которые разбивают сферу на области, ограниченные одной замкнутой кривой.

Из равенства (1) можно вывести разнообразные следствия. Например, из него легко вытекает, что существует всего пять типов правильных многогранников. Можно получить из него (но сложнее) и классификацию полуправильных многогранников.

Ещё один пример неожиданных фактов, обогативших современную геометрию. В середине XIX в. в геометрии появились *односторонние поверхности*. Первый пример такой поверхности построил немецкий геометр Август Мёбиус (1790—1868). Он взял обыкновенную прямоугольную полоску бумаги (рис. 233, а), один раз её перекрутил (рис. 233, б), а затем склеил (рис. 233, в). Получившуюся поверхность называют листом (или лентой) Мёбиуса. (Склейте и вы лист Мёбиуса.) Если полоску склеить, не перекручивая, то получится обычная боковая поверхность цилиндра (рис. 234, а), которую можно закрасить снаружи одной краской, а изнутри другой (рис. 234, б). Боковая поверхность цилиндра двусторонняя. И все поверхности, которые мы до сих пор рассматривали, двусторонние. А лист Мёбиуса так, как боковую поверхность цилиндра, двумя красками закрасить нельзя: начав красить его какой-либо краской, мы, не задевая его края, закрасим весь лист Мёбиуса (рис. 235). Лист Мёбиуса — односторонняя поверхность. И ещё на одно свойство листа Мёбиуса обратим ваше внимание: его краем является *одна замкнутая кривая* (рис. 236, а). А край боковой поверхности цилиндра состоит из двух замкнутых кривых (рис. 236, б). То обстоятельство, что лист Мёбиуса — односторонняя поверхность, имеет сейчас разнообразные технические применения. Свойства ленты Мёбиуса мог бы применить и Архимед, но он не обратил на них внимания (или мы об этом не знаем).

Сейчас, изучая различные поверхности, всегда выясняют (если это неясно из каких-либо соображений заранее), является ли эта поверхность односторонней или двусторонней. Эти свойства поверхностей также являются их топологическими свойствами.

Но, оказывается, можно расширять своё знакомство с геометрией и не покидая элементарную геометрию, и даже оставаясь в одной из её областей, например в геометрии треугольника. В п. 12.3 мы изучали различные замечательные точки треугольника. Естественно поставить вопрос: в каком случае отрезки AA_1, BB_1 и CC_1, идущие из вершин треугольника ABC до его противоположных сторон, проходят через одну точку (рис. 237)? Ответ на этот вопрос даёт теорема, которую доказал в 1678 г. итальянский математик Джованни Чева (1648—1734). Эти отрезки проходят через одну точку тогда и только тогда, когда выполняется равенство

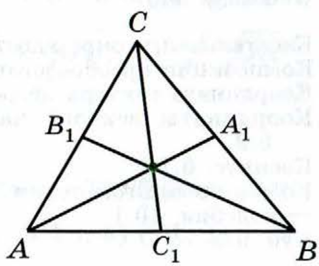


Рис. 237

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \quad (2)$$

Получите из этого равенства известные вам теоремы о замечательных точках треугольника и постарайтесь найти новые для вас утверждения. И до сих пор в геометрии треугольника находят всё новые результаты.

В предисловии Давида Гильберта к знаменитой книге «Наглядная геометрия» (написанной им вместе с Кон-Фоссеном), обращаясь к её читателю, он написал: «Пусть читатель прогуливается в огромном саду геометрии, в котором каждый может подобрать себе такой букет, какой ему нравится».

Предметный указатель

Бордюр 9.2

Вектор 1.1, 1.4
Векторная алгебра 4.1
Векторы коллинеарные 1.1
— ортогональные 1.1
— параллельные 1.1
— перпендикулярные 1.1
— противоположно направленные 1.2
— противоположные 2.3
— равные 1.3
— сонаправленные 1.2

Гомотетия 7.2, 10.2
Градусная мера дуги 11.3

Движение 8.1
Длина (модуль) вектора 1.1
— дуги окружности 13.2
— окружности 13.1
Додекаэдр 9.5

Замечательные точки треугольника 12.3

Икосаэдр 9.5

Касательная к окружности 11.2
Композиция преобразований 7.4
Координата вектора на оси 5.1
Координаты вектора на плоскости 5.2
Косинус 6.1
Коэффициент гомотетии 10.2
— подобия 10.1
Куб 9.5

Метод векторный 4.1
Многогранники правильные 9.5
— полуправильные (архимедовы) 13.5
Многоугольник правильный 9.4
Множества Жюлиа 10.3

Направленный отрезок 1.1
Неподвижная точка преобразования 7.1

Образ точки 7.1
— фигуры 7.1
Объединение двух фигур 7.1
Окружность, вписанная в многоугольник 12.2
— — — треугольник 12.2
— , описанная вокруг многоугольника 12.1
— — — треугольника 12.1
— Эйлера 12.3
Ортоцентр 12.3
Основное тригонометрическое тождество 6.1

Параллельный перенос 7.2, 8.3
Площадь круга 13.3
Подобие фигур 10.1
Поворот на плоскости 8.7
Правильный октаэдр 9.5
— тетраэдр 9.5
Преобразование взаимно однозначное 7.3
— обратимое 7.3
— обратное 7.3
Преобразование фигуры 7.1
Преобразования взаимно обратные 7.3
Проектирование фигуры 7.1
Произведение вектора на число 3.1
Прообраз точки (фигуры) 7.1

Равенство векторов 1.3
— фигур 8.9
Разность векторов 2.3

Секущая 11.5
Симметрия зеркальная 7.2, 8.6, 9.1
— осевая 7.2, 8.5, 9.1
— переносная 9.1, 9.2
— поворотная 9.1
— фигуры 9.1
— центральная 7.2, 8.4
Синус тупого угла 10.4
Сложение векторов 2.1
Скаляр (скалярная величина) 1.1
Скалярное произведение векторов 6.2
Сумма векторов 2.1
Сфера 14.3

Теорема косинусов 6.1
— синусов 10.4

Угол между векторами 1.5
— — вектором и осью 5.2
Угол, вписанный в окружность 11.4
— центральный 11.1

Центр масс (тяжести) треугольника 12.3

Ответы

1.15. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$. **1.21.** 12. **1.27.** а) 60°, 120°, 120°, 60°; б) 45°, 135°, 135°, 45°; в) 50°, 150°, 130°, 50°; г) 50°, 115°, 130°, 50°; д) α, $180° - \beta$, $180° - \alpha$, α. **1.28.** а) 80°; б) 140°; в) $\alpha + \beta$, если $\alpha + \beta < 180°$, и $360° - (\alpha + \beta)$, если $\alpha + \beta \geqslant 180°$. **1.29.** 120° или 0°. **1.30.** а) 45°; б) 135°; в) 90°; г) 60°; д) 90°; е) 120°.

2.8. ≈ 460 км. **2.12.** Нулю. Басня «Лебедь, Щука и Рак». **2.13.** а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) 0. **2.20.** а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) 1; д) $\sqrt{2}$.

3.5. а) $\overrightarrow{AC} = 0{,}75\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. **3.6.** а) $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; в общем случае $\overrightarrow{AX} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BX} = 0{,}5\overrightarrow{XA}$; в общем случае $\overrightarrow{BX} = \frac{1}{k}\overrightarrow{XA}$; в) $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{BX}$; в общем случае $\overrightarrow{AB} = -(k+1)\overrightarrow{BX}$. **3.7.** а), б) $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} = -0{,}5\vec{a}$; в), д) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = 0{,}5\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$; г), е) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} = 0{,}5\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$. **3.8.** а) $\overrightarrow{CD} = \vec{a} - \vec{b}$; б) $\overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{b}$; в) $\overrightarrow{AC_1} = -2\vec{a}$; г) $\overrightarrow{C_1A} = 2\vec{a}$; д) $\overrightarrow{AB_1} = -2\vec{a} - \vec{c} + \vec{b}$. **3.9.** а), б) От 1 до 3; в) от $|x - y|$ до $|x + y|$. **3.14.** а) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$; б) $\frac{q}{p+q}\overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{OB}$; в) $\frac{b}{a+b}\vec{a} + \frac{a}{a+b}\vec{b}$, где $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$.

5.2. а) −3; б) 7; в) −16. **5.3.** Нуль-вектор. **5.4.** 30 и −30. **5.5.** а) −140; б) 40; в) такой точки не существует; г) 28. **5.13.** а) (−1; 1), $\sqrt{2}$; б) (−3; −4), 5; в) (3; 4), 5; г) $(-2p; -2q)$, $2\sqrt{p^2 + q^2}$. **5.14.** а) 45°, 45°; б) 45°, 135°; в) 135°, 45°; г) 135°, 135°; д) 60°, 30°; е) 150°, 120°; ж) ≈ 56°, ≈ 34°. **5.15.** а) (3; −1); б) (1; −1); в) (3; −5); г) (12; −8); д) (−1; −4). **5.16.** а) (1; 1); б) (3; 1); в) (1; 5); г) (−8; 8); д) (5; 4). **5.17.** Убывает от $\sqrt{21}$ до 3. **5.18.** От 1 до $\sqrt{13}$. **5.22.** а) (−2; 1); б) (4; −2); в) (−6; 3). **5.23.** а) (0; 0); б) (−4; 4); в) (0; 0); г) $\left(-\frac{16}{3}; -\frac{7}{3}\right)$; д) (−10; 10); е) (−7; 7). **5.24.** а) $\vec{a} = (\sqrt{3}; -1)$, $\vec{b} = (-2; 2\sqrt{3})$; б) $(\sqrt{3} - 2; -1 + 2\sqrt{3})$; в) $(\sqrt{3} + 4; -1 - 4\sqrt{3})$. **5.25.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) нет. **5.26.** а) −6; б) −2; в) 0; г) 0. **5.27.** а), б) (2; 1); в) (−11; 5); г) $\left(\frac{10}{3}; \frac{29}{3}\right)$.

6.4. $1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1$. **6.5.** а) $60°$; б) $120°$; в) $\approx 73°$; г) $\approx 135°$; д) $180°$; е) $90°$; ж) $0°$. **6.6.** а) $\sqrt{0{,}91}$; б) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.7. а) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $\pm\sqrt{0{,}99}$; в) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.8.** а) Остроугольный; б), г) тупоугольный; в) остроугольный; д) прямоугольный. **6.9.** а) $\approx 78°$, $\approx 58°$, $\approx 44°$; б) $\approx 93°$, $\approx 48°$, $\approx 39°$; в) $\approx 55°$, $\approx 55°$, $\approx 70°$; г) $41°30'$, $41°30'$, $97°$; д) $\approx 13°$, $\approx 77°$, $90°$. **6.18.** а) $6\sqrt{3}$; б) $-6\sqrt{3}$; в) $6\sqrt{2}$; г) 6; д) 0; е) -6; ж) $-6\sqrt{2}$. **6.19.** а) 0; б) -4; в) 0. **6.20.** а) -2; б) -2; в) 3; г) 0; д) -3. **6.21.** а) $\approx 143°$; б) $135°$; в) $\approx 16°$; г) $90°$; д) $\approx 11°$.

I.5. б) Векторы $\vec{u} = (a;\ c)$ и $\vec{v} = (b;\ d)$ — единичные; в) $|(\vec{u}\cdot\vec{v})| \le |\vec{u}||\vec{v}|$. **I.7.** Окружность. **I.8.** а) Две гиперболы; б) две гиперболы и биссектрисы координатных углов без начала координат. **I.9.** а) Прямая.

7.4. а) $[-2;\ 1]$, $[2;\ 3]$, $2\frac{1}{2}$; б) $[1;\ 4]$, $[1;\ 2]\cup[-2;\ -1]$, 0 и 1; в) $[1;\ 2]$ и $[\frac{1}{2};\ 2]$, $\sqrt{2}$. **7.14.** $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\varphi$.

8.14. $0{,}25S$, $1{,}75S$. **8.15.** $\frac{1}{9}S$, $\frac{17}{9}S$. **8.18.** $\frac{2}{3}$. **8.27.** а) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; б) $(x+1)^2 + y^2 = 1$; в) $(x-(2a-1))^2 + y^2 = 1$. **8.36.** 0,25 и 0,75. **8.37.** $\frac{1}{2}a^2(\sqrt{2}-1)$ и $\frac{1}{2}a^2(3-\sqrt{2})$.

9.17. а) 6; б) 7. **9.19.** 9. **9.20.** а) 5; б) 9; в) 3. **9.21.** n для $n > 3$. **9.22.** $n+1$ для $n > 4$.

10.4. $\approx \frac{1}{12}$ и ≈ 10; ≈ 60; ≈ 18. **10.24.** $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25$ и $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}75$.

10.26. 0,25. **10.27.** а) $3:1$; б) $9:1$; в) $\frac{1}{16}$.

II.5. а) Гомотетия с центром в их центре масс и коэффициентом -2. **II.6.** б) $2 : \sqrt{3}$; в) композиция гомотетии и поворота; г) $\sqrt{3} : 2$ и $3 : 4$. **II.9.** Нет.

11.6. а) $0{,}5\sqrt{35}$, $\cos\varphi = \frac{17}{18}$; б) $2\sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{7}{9}$; в) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $60°$.

11.7. а) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $0{,}5\sqrt{2+\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ и $0{,}5\sqrt{2+\sqrt{2}}$; в) 1 и $0{,}5\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}$ и $0{,}5\sqrt{2}$; д) $\sqrt{3}$ и 0,5; е) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ и $0{,}5\sqrt{2-\sqrt{2}}$; ж) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $0{,}5\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **11.8.** $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$, $f(1) = \sqrt{3}$.

11.9. а) Меньше $60°$; б) больше $60°$, но меньше $180°$; в) меньше угла, косинус которого равен 0,99995. **11.16.** $\sqrt{c^2 - a^2}$. **11.17.** $0{,}5\varphi$. **11.18.** $R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ и $R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. **11.28.** $180° - \varphi$ и $180° + \varphi$. **11.29.** $\frac{180° + \varphi}{180° - \varphi}$. **11.31.** $\left(98\frac{2}{11}\right)^{\circ}$. **11.34.** а) $100°$; б) $35°$; в) $60°$; г) $80°$; д) $36°$; е) $110°$; ж) $32°$; з) $100°$. **11.35.** а) $60°$; б) $30°$; в) $35°$; г) $20°$; д) $40°$. **11.36.** $45°$, $60°$, $75°$. **11.37.** а) 2; б) $2\sqrt{2}$; в) $2\sqrt{3}$; г) 4; д) $2\sqrt{3}$. **11.38.** а) Меньше 2; б) больше $2\sqrt{2}$, но не больше диаметра; в) любой длины до 4; г) меньше $2\sqrt{2}$. **11.42.** а) 12; б) 3; в) 2; г) 2; д) 32; е) 2. **11.43.** $R^2 - a^2$. **11.44.** $a^2 - R^2$. **11.45.** Уменьшился в 2,5 раза. **11.46.** Увеличился в 3 раза. **11.47.** $MC = 12$, $MA = 18$ и $MC = 5$, $MA = 25$. **11.52.** а) Расстояние от спутника до линии горизонта на Земле $\approx$ 1600 км.

12.3. а) $\frac{c}{2}$; б) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{25}{4}$; г) $\frac{c^2}{\sqrt{4c^2 - a^2}}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\sin^3\varphi\cos\varphi}}$. **12.4.** а) $\frac{8}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{c}{2\sin(\alpha + \beta)}$. **12.17.** а) $\frac{a}{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}$, или (что то же самое) половина разности суммы катетов и гипотенузы; в) $\frac{10}{3}$. **12.18.** $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$.

13.2. Увеличить на $\frac{1}{2\pi}$ м. **13.3.** Увеличилась на 2π м.
13.4. г) $1 : \cos\frac{180°}{n}$. **13.5.** а) 5π; б) и г) $\pi\sqrt{a^2 + b^2}$; в) $\pi\frac{b}{\sin B}$, где $\cos B = \frac{a}{2b}$; д) полагая, что в трапеции основание $a > b$, находим косинус острого угла φ трапеции: $\cos\varphi = \frac{a - b}{2c}$, находим по теореме косинусов диагональ d трапеции, а затем находим радиус окружности по формуле $\frac{d}{2\sin\varphi}$; е) $\frac{\pi a}{\sin\varphi}$; ж) $\pi\frac{16}{\sqrt{7}}$. **13.6.** а) $\pi a\sin\alpha$; б) $2\pi\frac{ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}$; в) $2\pi\frac{a\sqrt{b^2 - 0{,}25a^2}}{a + 2b}$; г) $\pi\frac{a\cos\frac{a}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$. **13.7.** Если $L_1 > L_2$, то $(L_1 - L_2) : 2\pi$. **13.8.** 2. **13.9.** Для правильного n-угольника отношение равно $\pi : \left(n\sin\frac{180°}{n}\right)$. При $n = 6$ имеем $\pi : 3 \approx 1{,}05$, при $n = 10$

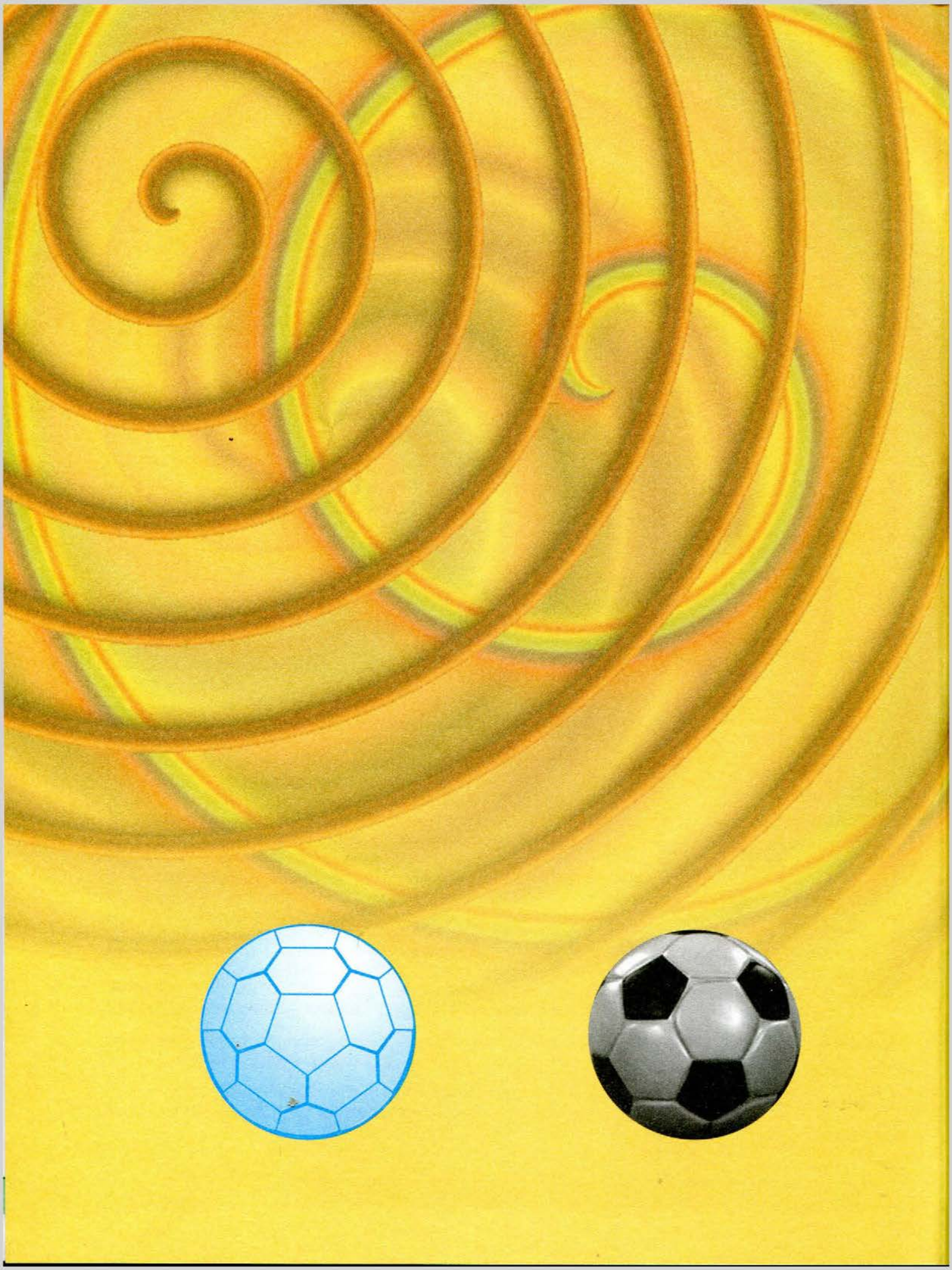
имеем $\pi : (10\sin 18°) \approx 1{,}02$, при $n = 12$ имеем $k = \pi : (12\sin 15°) \approx$ $\approx 1{,}01$, при $n = 20$ имеем $\pi : (20\sin 9°) \approx 1{,}00$.

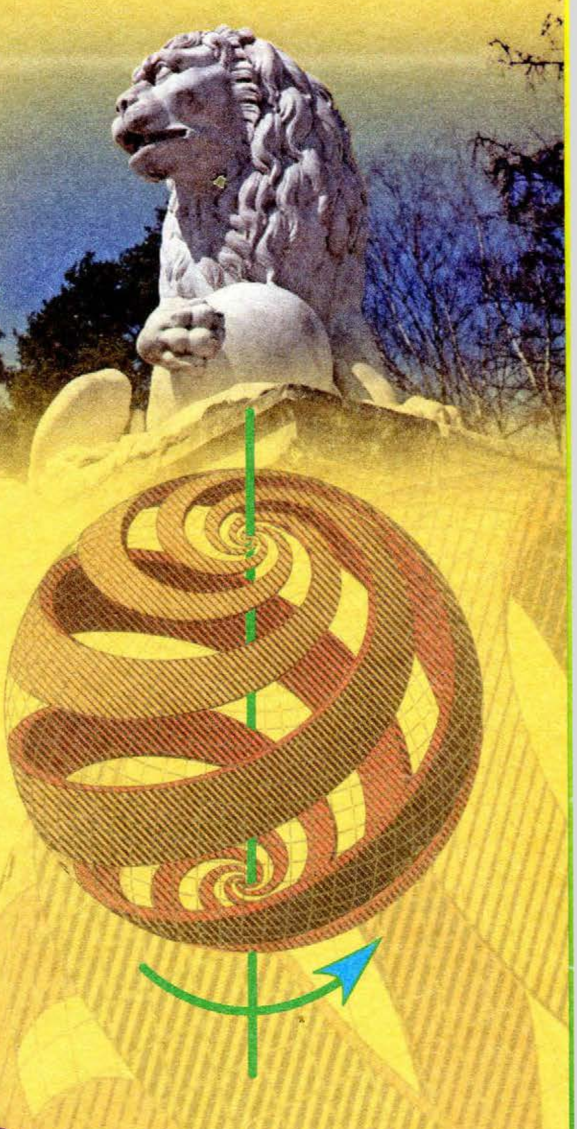
13.10. $2\pi Rn$. **13.17.** а) $\frac{1}{6}\pi R$; б) $\frac{5}{12}\pi R$; в) $\frac{2}{3}\pi R$; г) $\frac{3}{4}\pi R$; д) $\frac{4}{3}\pi R$; е) $\frac{7}{4}\pi R$. **13.18.** $\frac{1}{3}\pi R$ и $\frac{5}{3}\pi R$. **13.19.** а) 180°; б) 90°; в) 30°; г) 120°; д) 315°; е) 330°; ж) $\frac{180°}{\pi}$. **13.20.** Радиус x малых окружностей удовлетворяет уравнению $R = x + x\frac{\sqrt{3}}{3}$. Большая окружность разбита на дуги по 120°, а малые окружности разбиты на дуги по 60°, 150° и 150°. **13.21.** $\frac{L_1}{L}360°$. **13.22.** Отношение равно $(180° + \varphi) : (180° - \varphi)$. При возрастании угла φ оно возрастает. Оно равно двум при $\varphi = 60°$. **13.33.** а) $\frac{\pi}{3}a^2$; б) $\frac{\pi}{2}a^2$; в) $\frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)$; г) $\frac{\pi a^2}{4\cos^2\alpha}$. **13.34.** а) $\frac{\pi}{12}a^2$; б) $\frac{\pi a^2}{6 + 2\sqrt{2}}$; в) $\frac{\pi a^2 b^2}{(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})^2}$; г) $\frac{\pi a^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(1 + \sin\alpha)^2}$. **13.35.** $\sqrt{2}$ **13.37.** а) 75%; б) 19%. **13.38.** Круг, так как $\frac{1}{16}L^2 < \frac{1}{4\pi}L^2$. **13.39.** Круг, так как $\frac{1}{8\sqrt{3}}L^2 < \frac{1}{4\pi}L^2$. **13.40.** Поскольку $4\sqrt{S} > 2\sqrt{S}\sqrt{\pi}$, то граница квадрата длиннее. **13.41.** У шестиугольника. **13.42.** а) Не менее 8; б) не менее 12.

III.3. $R(2\sqrt{3} - 3)$. **III.4.** $R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$. **III.7.** Указание: на диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$ постройте такую точку P, что $\angle ABP = \angle CBD$.

Список рекомендуемой литературы

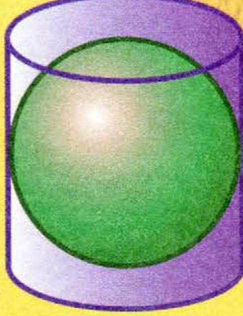
1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Планиметрия. Ч. 1 / Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1957. См. также в Интернете по адресу: http://ilib.mirror1.mccme.ru/
2. *Александров А. Д.* Геометрия, 8: учебник для школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2008.
3. *Александров А. Д.* Геометрия, 9: учебник для школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2004.
4. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение/ И. И. Александров. — М.: МЦНМО, 2010.
5. *Вернер А. Л.* Стереометрия: учеб. пособие для учащихся 7—9 кл. общеобразоват. учреждений / А. Л. Вернер, Т. Г. Ходот. — М.: Просвещение, 2006.
6. *Веннинджер М.* Модели многогранников / М. Веннинджер. — М.: Мир, 1974.
7. *Волошинов А. В.* Мудрость Эллады: [для ст. шк. возраста] / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2009.
8. *Волошинов А. В.* Пифагор / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 1993.
9. *Волошинов А. В.* Математика и искусство / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2000.
10. *Делоне Б. Н.* Задачник по геометрии / Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский. — М.; Л., ГИТТЛ, 1950.
11. Журнал «Квант». Раздел «Задачи для младших школьников». См. также в Интернете по адресу: http://kvant.mirror1.mccme.ru/
12. *Левитин К.* Геометрическая рапсодия / К. Левитин. — М.: Знание, 1984.
13. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ: Астрель, 2002.
14. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.
15. Геометрия. Динамическая геометрия. 9 класс. См. в Интернете по адресу: http://school-collection.edu.ru/





$$\pi \approx \frac{22}{7}$$

АРХИМЕД
(ок. 287 –
212 до н.э.)



$$\frac{V_{ц}}{V_{ш}} = \frac{3}{2}$$